Stochastik II (Wahrscheinlichkeitstheorie) 2009/10

7. Serie

1. Geben Sie einen direkten Beweis des zweiten Teils des Lemmas von Borel und Cantelli im Fall **unabhängiger** Ereignisse $A_1, A_2, \ldots$.

   Hinweis: Es ist zu zeigen, dass in diesem Fall aus $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n) = \infty$ die Aussage $\mathbb{P}(A_n \text{ u. o.}) = 1$ folgt. Verwenden Sie, dass diese Wahrscheinlichkeit mit

   $$\lim_{m\to\infty} \left[1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n^c\right)\right]$$

   übereinstimmt.

2. Wann gelten für unabhängige Ereignisse $A_1, A_2, \ldots$ die Aussagen

   $$\mathbb{P}(A_n \text{ s.i.}) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{P}(A_n \text{ s.i.}) = 1\ ?$$

3. Gegeben sei eine Folge $(U_n)_{n\geq 1}$ unabhängiger zufälliger Größen. Die U_n seien auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ definiert und gleichverteilt auf $[0,1]$. Für $\omega \in \Omega$ sei die zufällige Menge $A(\omega) \subseteq [0,1]$ durch

   $$A(\omega) := \{U_1(\omega), U_2(\omega), \ldots\}$$

   definiert. Man setzt $\Omega_0 := \{\omega \in \Omega : \overline{A(\omega)} = [0,1]\}$ (hierbei bezeichnet $\overline{A}$ die abgeschlossene Hülle einer Menge A), d.h. für $\omega \in \Omega_0$ ist $A(\omega)$ dicht in $[0,1]$. Man zeige, dass Ω_0 messbar ist und $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ gilt.

   Hinweis: Man verwende, dass eine Menge A in $[0,1]$ genau dann dicht ist, wenn für jede rationale Zahl $q \in [0,1]$ und jedes $\varepsilon > 0$ stets $A \cap \{t \in [0,1] : |t-q| < \varepsilon\} \neq \emptyset$ gilt.

4. Die zufälligen Größen $X_1, X_2, \ldots$ seien unabhängig und F_n bezeichne die Verteilungsfunktion von X_n, d.h. es gilt $F_n(x) = \mathbb{P}(X_n \leq x)$ für $x \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass dann und nur dann $\mathbb{P}\big(\lim_{n\to\infty} X_n = 0\big) = 1$ gilt, wenn man

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \big(1 - F_n(\varepsilon) + F_n(-\varepsilon)\big) < \infty$$

   für jedes $\varepsilon > 0$ hat.

5. Gegeben seien zwei Folgen unabhängiger zufälliger Größen $(X_n)_{n\geq 1}$ und $(Y_n)_{n\geq 1}$ mit

   $$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\,(X_n - Y_n) = 0$$

   (die Erwartungswerte von X_n und Y_n sollen existieren) sowie

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\{X_n \neq Y_n\}) < \infty\ .$$

   Zeigen Sie, dass die Folge $(Y_n)_{n\geq 1}$ das starke Gesetz der großen Zahlen erfüllt, sofern dies für die X_n's gilt.

Abgabe: 08. 12. 09