Wahrscheinlichkeitstheorie
FSU Jena - WS 09/10
Serie 06 - Lösungen

Stilianos Louca

December 8, 2009

Aufgabe 01

- Es gelte $b := \overline{\lim_{n\to\infty}} X_n(\omega) > \alpha$. Im Fall $b = \infty$ ist die Folge $X_n(\omega)$ nach oben unbeschränkt, also $X_n(\omega) > \alpha$ unendlich oft. Im Fall $b \in \mathbb{R}$ ist b Häufungspunkt von $(X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$, also insbesondere $X_n(\omega) > b - |b-a|/2$ unendlich oft. Daher:
$$\left\{\overline{\lim_{n\to\infty}} X_n > \alpha\right\} \subseteq \{X_n > \alpha \text{ u.o.}\}$$
Die Umkehrung gilt jedoch allgemein nicht, z.B. im Fall
$$X_n(\omega) := \frac{1}{n} \quad , \quad \alpha = 0$$

- Ist $X_n(\omega) \geq \alpha$ unendlich oft, so ist $\sup_{k\geq n} X_k(\omega) \geq \alpha$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, sprich $\overline{\lim_{n\to\infty}} X_n(\omega) \geq \alpha$. Daher:
$$\left\{\overline{\lim_{n\to\infty}} X_n \geq \alpha\right\} \supseteq \{X_n \geq \alpha \text{ u.o.}\}$$
Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht, z.B. im Fall
$$X_n(\omega) = -\frac{1}{n} \quad , \quad \alpha = 0$$

- Gilt $b := \overline{\lim_{n\to\infty}} X_n < \alpha$, so existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sup_{k\geq n} X_k(\omega) < \alpha \ \ \forall\, n \geq n_0$, das heißt $X_n(\omega) < \alpha$ schließlich immer. Daher:
$$\left\{\overline{\lim_{n\to\infty}} X_n < \alpha\right\} \subseteq \{X_n < \alpha \text{ s.i.}\} \tag{0.1}$$
Die Umkehrung gilt allgemein nicht, z.B. im Fall
$$X_n(\omega) = -\frac{1}{n} \quad , \quad \alpha = 0$$

- Sei $X_n \leq \alpha$ schließlich immer, das heißt für irgendein $n_0 \in \mathbb{N}$ gilt $X_k(\omega) \leq \alpha \ \ \forall\, k \geq n_0$. Dann gilt insbesondere $\sup_{k\geq n} X_k(\omega) \leq \alpha \ \ \forall\, n \geq n_0$, sprich $\overline{\lim_{n\to\infty}} X_n(\omega) \leq \alpha$ bzw.
$$\{X_n \leq \alpha \text{ s.i.}\} \subseteq \left\{\overline{\lim_{n\to\infty}} X_n \leq \alpha\right\} \tag{0.2}$$
Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht, z.B. im Fall
$$X_n(\omega) = \frac{1}{n} \quad , \quad \alpha = 0$$

Aufgabe 02

Variante 1

Gegeben $\alpha < \beta$, dazu die Nullmenge

$$N_{\alpha,\beta} := \{X_n < \alpha \text{ u.o. } \& \ X_n > \beta \text{ u.o.}\}$$

Dann gilt für $\omega \notin N_{\alpha,\beta}$

$$X_n(\omega) \geq \alpha \text{ s.i.} \quad \text{oder} \quad X_n(\omega) \leq \beta \text{ s.i.}$$

Betrachtet sei nun die Nullmenge[1]

$$N := \bigcup_{\alpha,\beta\in\mathbb{Q}} N_{\alpha,\beta}$$

Dann gilt für $\omega \notin N$:

$$\forall \ \alpha < \beta \in \mathbb{Q} \ : \ X_n(\omega) \geq \alpha \text{ s.i.} \quad \text{oder} \quad X_n(\omega) \leq \beta \text{ s.i.}$$

Insbesondere:

- Im Fall $\nexists \ \alpha \in \mathbb{Q} : X_n(\omega) \geq \alpha$ s.i., gilt $X_n(\omega) \leq \beta$ s.i. $\forall \ \beta \in \mathbb{Q}$, sprich $X_n(\omega) \to -\infty$.
- Analog geht $X_n(\omega) \to \infty$ falls $\nexists \ \beta \in \mathbb{Q} : X_n(\omega) \leq \beta$ s.i..
- Im Fall $X_n(\omega) \geq \alpha$ s.i., $X_n(\omega) \leq \beta$ s.i. für irgendwelche $\alpha = \beta \in \mathbb{Q}$ ist $X_n(\omega) = \alpha$ s.i. also $X_n(\omega) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha$.
- Im Fall $X_n(\omega) \geq \alpha$ s.i., $X_n(\omega) \leq \beta$ s.i. für irgendwelche $\alpha \neq \beta \in \mathbb{Q}$ ($\Rightarrow \ \alpha < \beta$), definiere die Folgen

  $$\alpha_0 := \alpha \ , \ \beta_0 := \beta \ , \ \gamma_n := (\alpha_n + \beta_n)/2$$

  $$\alpha_n := \begin{cases} \gamma_{n-1} & : X_n(\omega) \geq \gamma_{n-1} \text{ s.i.} \\ \alpha_{n-1} & : \text{sonst} \end{cases} \quad , \quad \beta_n := \begin{cases} \gamma_{n-1} & : X_n(\omega) \leq \gamma_{n-1} \text{ s.i.} \\ \beta_{n-1} & : \text{sonst} \end{cases}$$

  Dann konvergieren $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \gamma \in [\alpha, \beta]$ (Intervallhalbierungsverfahren) und für beliebiges $\varepsilon > 0$ ist $X_n(\omega) \in B_\varepsilon(\gamma)$ s.i.[2] Daher konvergiert auch $X_n(\omega) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \gamma$.

Gezeigt wurde also: Fast jede Folge $X_n(\omega)$ konvergiert in $\widetilde{\mathbb{R}}$. Jedoch ist die fast-sichere Konvergenz in $\mathbb{R}$ **nicht** gegeben. Als Beispiel sei der Fall

$$(\Omega, \mathfrak{S}, \mathcal{P}) := (\{0\}, \{\{0\}, \emptyset\}, \delta_0) \quad , \quad X_n(\omega) := n \quad \forall \ \omega \in \Omega$$

genannt.

Variante 2

Wegen

$$\{X_n \text{ konvergiert in } \mathbb{R}^*\} = \left\{ \overline{\lim_{n\to\infty}} \ X_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} \ X_n \right\}$$

[1] Da abzählbare Vereinigung von Nullmengen.

[2] Da $\forall \ \varepsilon > 0$ stets irgendein n existiert mit $\alpha_n, \beta_n \in B_\varepsilon(\gamma)$.

gilt

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}\left(X_n \text{ konvergiert nicht in } \mathbb{R}^*\right) = \mathcal{P}\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\ X_n > \underline{\lim_{n\to\infty}}\ X_n\right) \\
&= \mathcal{P}\Big(\bigcup_{\alpha<\beta\in\mathbb{Q}} \underline{\lim_{n\to\infty}}\ X_n < \alpha\ \wedge\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\ X_n > \beta\Big) \\
&\leq \sum_{\alpha<\beta\in\mathbb{Q}} \mathcal{P}\left(\underline{\lim_{n\to\infty}}\ X_n < \alpha,\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\ X_n > \beta\right) \\
&\overset{(01)}{\leq} \sum_{\alpha<\beta\in\mathbb{Q}} \underbrace{\mathcal{P}\left(X_n < \alpha \text{ u.o.},\ X_n > \beta \text{ u.o.}\right)}_{0} = 0
\end{aligned}
$$

□

Aufgabe 03

(a) Sei $t > 0$ fest. Da $A := \{X_n > t \cdot \ln n \text{ u.o.}\}$ ein terminales Ereignis ist, besitzt es nach Kolmogorov Wahrscheinlichkeit 0 oder 1. Wegen

$$
A = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \underbrace{\bigcup_{n\geq m} \{X_n > t\cdot \ln n\}}_{\text{fallend in } m}
$$

gilt ferner

$$
\mathcal{P}(A) = \lim_{m\to\infty} \mathcal{P}\Big(\bigcup_{n\geq m} \{X_n > t\cdot\ln n\}\Big) = 1 - \lim_{m\to\infty} \mathcal{P}\Big(\bigcap_{n\geq m} \{X_n \leq t\cdot\ln n\}\Big)
$$

$$
\overset{\substack{X_1,X_2\\ \text{unabhängig}}}{=} 1 - \lim_{m\to\infty} \prod_{n=m}^{\infty} \mathcal{P}(X_n \leq t\cdot\ln n) = 1 - \lim_{m\to\infty} \prod_{n=m}^{\infty} \left[1 - \frac{1}{n^{\lambda t}}\right]
$$

Dabei gilt (für $m \geq 2$):

$$
\prod_{n=m}^{\infty} \underbrace{\left[1 - \frac{1}{n^{\lambda t}}\right]}_{\frac{n^{\lambda t}-1}{n^{\lambda t}}} > 0 \quad\Leftrightarrow\quad \prod_{n=m}^{\infty} \underbrace{\left[\frac{n^{\lambda t}}{n^{\lambda t}-1}\right]}_{1+\frac{1}{n^{\lambda t}-1}} < \infty \quad\Leftrightarrow\quad \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda t}-1} < \infty
$$

- **Fall:** $\lambda t \leq 1$. Dann ist
$$
\prod_{n=m}^{\infty} \left[1 - \frac{1}{n^{\lambda t}}\right] = 0 \quad \forall\ m \geq 2
$$
und daher $\mathcal{P}(A) = 1$.
- **Fall:** $\lambda t > 1$. Dann ist
$$
\underbrace{\prod_{n=m}^{\infty} \left[1 - \frac{1}{n^{\lambda t}}\right]}_{\text{wachsend in } m} > 0 \quad \forall\ m \geq 2 \qquad (\text{insbesondere für } m = 2)
$$
also $\mathcal{P}(A) < 1$ bzw. $\mathcal{P}(A) = 0$.

(b) Wegen

$$\left\{ \varlimsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\ln n} \leq t \right\} \overset{(0.2)}{\supseteq} \{X_n \leq t \cdot \ln n \text{ s.i.}\} = \{X_n > t \cdot \ln n \text{ u.o.}\}^c$$

gilt für $t > 1/\lambda$:

$$\mathcal{P}\left(\varlimsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\ln n} \leq t \right) \geq 1 - \underbrace{\mathcal{P}\left(X_n > t \cdot \ln n \text{ u.o.}\right)}_{0 \text{ nach (a)}} = 1$$

Anderseits gilt für $t < 1/\lambda$:

$$\left\{ \varlimsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\ln n} \leq t \right\} \subseteq \left\{ \varlimsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\ln n} < 1/\lambda \right\} \overset{(0.1)}{\subseteq} \{X_n < (1/\lambda) \cdot \ln n \text{ s.i.}\}$$

$$\subseteq \{X_n \leq (1/\lambda) \cdot \ln n \text{ s.i.}\} = \{X_n > (1/\lambda) \cdot \ln n \text{ u.o.}\}^c$$

und somit

$$\mathcal{P}\left(\varlimsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\ln n} \leq t \right) \leq 1 - \underbrace{\mathcal{P}\left(X_n > (1/\lambda) \cdot \ln n \text{ u.o.}\right)}_{1 \text{ nach (a)}} = 0$$

Daher besitzt $\varlimsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\ln n}$ die Verteilungsfunktion[3]

$$F(t) = \begin{cases} 1 & : t \geq 1/\lambda \\ 0 & : t < 1/\lambda \end{cases}$$

Aufgabe 04

(a) Sei zunächst $m \in \mathbb{N}$ fest, dazu

$$Z_n := S_n - S_m = X_{m+1} + \cdots + X_n \quad , \quad n \geq m$$

Da die $X_n,\ n \geq m$ bzgl. $\sigma(X_n : n \geq m)$ messbar sind, sind auch alle $Z_n,\ n \geq m$ bzgl. $\sigma(X_n : n \geq m)$ messbar, also

$$\sigma(Z_n : n \geq m) \subseteq \sigma(X_n : n \geq m)$$

- Bekanntlich ist

  $$\left\{ \exists \lim_{n\to\infty} Z_n \in \mathbb{R} \right\} \in \sigma(Z_n : n \geq m)$$

  (vgl. Vorlesung) so dass wegen

  $$\left\{ \exists \lim_{n\to\infty} S_n \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \exists \lim_{n\to\infty} Z_n \in \mathbb{R} \right\}$$

  auch gilt

  $$\left\{ \exists \lim_{n\to\infty} S_n \in \mathbb{R} \right\} \in \sigma(X_n : n \geq m)$$

  (für alle $m \in \mathbb{N}$). Somit ist

  $$\left\{ \exists \lim_{n\to\infty} S_n \in \mathbb{R} \right\} \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \sigma(X_n : n \geq m)$$

  terminal.
- $\left\{ \lim_{n\to\infty} S_n \right\}$ ist im Allgemeinen **kein** terminales Ereignis. Als Beispiel diene

  $$(\Omega, \mathfrak{S}) := (\{0,1\}, \mathscr{P}\{0,1\})$$

  mit

  $$X_1(\omega) := \omega,\ \ X_n(\omega) := 0 \ \ \forall\, n \geq 2$$

  Dann ist

  $$\left\{ \lim_{n\to\infty} S_n = 0 \right\} = X_1^{-1}(0) = \{0\} \notin \{\emptyset, \Omega\} = \sigma(X_n : n \geq 2)$$

[3] Aufgrund der rechtsseitigen Stetigkeit von F muss auch $F(1/\lambda) = 1$ sein.

(b) Sei $m \in \mathbb{N}$ zunächst fest, dazu die Z_n definiert wie in (a). Bekanntlich ist

$$\left\{\lim_{n\to\infty} c_n Z_n = a\right\} \in \sigma\left(c_n Z_n : n \geq m\right) \subseteq \sigma\left(Z_n : n \geq m\right) \overset{(a)}{\subseteq} \sigma(X_n : n \geq m)$$

(vgl. Vorlesung). Wegen

$$\lim_{n\to\infty} c_n Z_n = \lim_{n\to\infty} c_n S_n - \underbrace{\lim_{n\to\infty} c_n S_m}_{0} = \lim_{n\to\infty} c_n S_n$$

gilt daher

$$\left\{\lim_{n\to\infty} c_n S_n = a\right\} = \left\{\lim_{n\to\infty} c_n Z_n = a\right\} \in \sigma(X_n : n \geq m)$$

(für alle $m \in \mathbb{N}$), sprich

$$\left\{\lim_{n\to\infty} c_n S_n = a\right\} \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \sigma(X_n : n \geq m)$$

Aufgabe 05

Variante 1

Beweis durch Widerspruch: Setze

$$A := \left\{\exists \lim_{n\to\infty} X_n \in \mathbb{R}\right\} \quad , \quad X := (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

und nehme an $\mathcal{P}(A) > 0$.

- Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, dann existiert wegen[4]

$$A = X^{-1}\left[\bigcup_{x\in\varepsilon\cdot\mathbb{Z}} \underbrace{\left\{(x_n) \subseteq \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} x_n \in B_\varepsilon(x)\right\}}_{=:R_{\varepsilon,x}}\right]$$

  mindestens ein $x \in \varepsilon\mathbb{Z}$ mit $\mathcal{P}_X(R_{\varepsilon,x}) > 0$. Wegen

$$R_{\varepsilon,x} \subseteq \bigcup_{l\in\mathbb{N}} \underbrace{\mathbb{R}^{l-1} \times \bigtimes_{n=l}^{\infty} B_{2\varepsilon}(x)}_{R_{\varepsilon,x,l}}$$

  gibt es ein $l \in \mathbb{Z}$ mit

$$0 < \mathcal{P}_X(R_{\varepsilon,x,l}) \overset{\substack{X_1,X_2,..\\ \text{unabhängig}}}{=} \bigotimes_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_{X_n}(R_{\varepsilon,x,l}) = \prod_{n=l}^{\infty} \mathcal{P}_{X_n}(B_{2\varepsilon}(x)) \overset{\substack{X_1,X_2,..\\ \text{identisch}\\ \text{verteilt}}}{=} \prod_{n=l}^{\infty} \mathcal{P}_{X_1}(B_{2\varepsilon}(x)$$

  Demnach muss gelten

$$\mathcal{P}_{X_n}(B_{2\varepsilon}(x)) = 1$$

- Gezeigt wurde also: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine Kugel $B_\varepsilon(x)$ mit $\mathcal{P}_{X_1}(B_\varepsilon(x)) = 1$. Setzt man nun $\varepsilon_n := \frac{1}{n}$, dazu die entsprechenden Kugeln $B_{\varepsilon_n}(x_n)$, so bilden die Mengen (Intervalle)

$$B_m := \bigcap_{n=1}^{m} B_{\varepsilon_n}(x_n)$$

  eine monoton fallende Mengenfolge mit $\mathcal{P}_{X_1}(B_m) = 1$. Anderseits kann der Schnitt $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} B_m$ höchstens einen Punkt $c \in B_m$ enthalten (muss sogar, da Maß $\neq 0$), so dass

$$\mathcal{P}_{X_1}(\{c\}) = \mathcal{P}\left(\bigcap_{m\in\mathbb{N}} B_m\right) = \lim_{m\to\infty} \underbrace{\mathcal{P}_{X_1}(B_m)}_{1} = 1 \quad ,$$

  ein Widerspruch zur Aufgabenvorraussetzung!

[4] $B_\varepsilon(k)$: abgeschlossene ε-Kugel um k.

Variante 2

Da

$$\left\{\exists \lim_{n\to\infty} X_n \in \mathbb{R}\right\}$$

bzgl. der unabhängigen $X_1, X_2, ..$ terminal ist, gilt

$$\mathcal{P}\left(\exists \lim_{n\to\infty} X_n \in \mathbb{R}\right) \in \{0,1\}$$

Machen die **Annahme** dass

$$\mathcal{P}\left(\exists \lim_{n\to\infty} X_n \in \mathbb{R}\right) = 1$$

dann ist fast-sicher $\underline{\lim}_{n\to\infty} X_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} X_n \in \mathbb{R}$, also fast-sicher konstant. Es existiert also ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$\mathcal{P}\left(X_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} c\right) = 1 \tag{0.3}$$

Doch wegen

$$\left\{X_n \overset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} c\right\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \left\{|X_m - c| > \frac{1}{k}\right\} \supseteq \underbrace{\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \left\{|X_m - c| > \frac{1}{k}\right\}}_{|X_m - c| > \frac{1}{k} \text{ u.o.}} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

muss nach (0.3) gelten

$$\mathcal{P}\left(|X_m - c| > \tfrac{1}{k} \text{ u.o.}\right) = 0$$

bzw. nach Borel & Cantelli

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\mathcal{P}\left(|X_m - c| > \tfrac{1}{k}\right)}_{\mathcal{P}\left(|X_1 - c| > \frac{1}{k}\right)} < \infty \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

Insbesondere muss

$$\mathcal{P}\left(|X_1 - c| > \tfrac{1}{k}\right) = 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

bzw.

$$\mathcal{P}\left(|X_1 - c| \le \tfrac{1}{k}\right) = 1 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

Daher

$$\mathcal{P}(X_1 = c) = \mathcal{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left\{|X_m - c| \le \tfrac{1}{k}\right\}}_{\text{fallend in } k}\Big) = \lim_{k\to\infty} \underbrace{\mathcal{P}\left(|X_k - c| \le \frac{1}{k}\right)}_{1} = 1$$

ein Widerspruch zur Aufgabenvoraussetzung!

□