Stochastik II (Wahrscheinlichkeitstheorie) 2009/10

6. Serie

1. Gelten für eine Folge $X_1, X_2, \ldots$ von zufälligen Größen und für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Aussagen

$$\{\limsup_{n\to\infty} X_n > \alpha\} = \{X_n > \alpha \text{ u.o.}\}\,, \qquad \{\limsup_{n\to\infty} X_n < \alpha\} = \{X_n < \alpha \text{ s.i.}\}\,,$$
$$\{\limsup_{n\to\infty} X_n \geq \alpha\} = \{X_n \geq \alpha \text{ u.o.}\} \text{ und } \{\limsup_{n\to\infty} X_n \leq \alpha\} = \{X_n \leq \alpha \text{ s.i.}\}\,?$$

   Falls die obigen Identitäten nicht stets gelten, welche Inklusionen bestehen ?

2. Für eine Folge von zufälligen Größen $X_1, X_2, \ldots$ und für alle α und β in $\mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta$ gelte stets

$$\mathbb{P}\big(X_n < \alpha \text{ u.o.} \quad \text{und} \quad X_n > \beta \text{ u.o.}\big) = 0\,.$$

   Zeigen Sie, dass dann die Folge $(X_n)_{n=1}^\infty$ $\mathbb{P}$–f.ü. in $\bar{\mathbb{R}}$ konvergiert. Konvergiert sie dann sogar stets in $\mathbb{R}$?
   Hinweis: Betrachten Sie zuerst Paare (α, β) mit $\alpha < \beta$ und α, β rational.

3. Gegeben sei eine unabhängige Folge $X_1, X_2, \ldots$ von exponentiell verteilten zufälligen Größen mit Parameter $\lambda > 0$, d.h. man hat $\mathbb{P}(X_n > t) = e^{-\lambda t}$ für $t > 0$.

   (a) Bestimmen Sie $\mathbb{P}(\, X_n > \log n \text{ u.o.})$ in Abhängigkeit von λ.

   (b) Berechnen Sie $\limsup_{n\to\infty} \dfrac{X_n}{\log n}$.

4. Gegeben sei eine Folge $X_1, X_2, \ldots$ von zufälligen Größen, und wie üblich definiert man S_n durch $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

   (a) Zeigen Sie, dass $\{\lim_{n\to\infty} S_n \text{ existiert in } \mathbb{R}\}$ ein terminales Ereignis ist. Gilt dies auch für $\{\lim_{n\to\infty} S_n = 0\}$?

   (b) Zeigen Sie, dass für eine Folge $c_1, c_2, \ldots$ reeller Zahlen mit $c_n \to 0$ das Ereignis $\{\lim_{n\to\infty} c_n S_n = a\}$ für ein vorgegebenes $a \in \mathbb{R}$ stets terminal ist.

5. Gegeben sei eine Folge $X_1, X_2, \ldots$ von unabhängigen, identisch verteilten zufälligen Größen, die nicht fast sicher konstant sind, d.h. es existiert kein $c \in \mathbb{R}$ mit $\mathbb{P}(X_1 = c) = 1$. Zeigen Sie dann

$$\mathbb{P}\big(\, X_n \text{ konvergiert in } \mathbb{R}\,\big) = 0\,.$$

Abgabe: 01. 12. 09