Wahrscheinlichkeitstheorie
FSU Jena - WS 09/10
Serie 05 - Lösungen

Stilianos Louca

November 24, 2009

Konvention: Für Abbildung $X : \Omega \to S$ und Mengenfamilie $\mathcal{E} \subseteq \mathscr{P}(S)$ sei

$$X^{-1}(\mathcal{E}) := \left\{X^{-1}(E) : E \in \mathcal{E}\right\}$$

Für Familie messbarer Räume $(S_i, \mathcal{S}_i)_{i\in I}$ und $B \in \bigotimes_{k=1}^n \mathcal{S}_{i_k}$ sei

$$Z(B) := \left\{(s_i)_{i\in I} \in \bigtimes_{i\in I} S_i : (s_{i_1}, .., s_{i_n}) \in B\right\}$$

die zu B entsprechende Zylindermenge auf $\bigtimes_{i\in I} S_i$ und

$$\mathscr{Z} := \left\{Z(B) : B \in \bigotimes_{k=1}^n \mathcal{S}_{i_k},\ \ \underbrace{i_1, .., i_n}_{\substack{\text{paarweise}\\ \text{verschieden}}} \in I\right\}$$

die Menge aller Zylindermengen bzw.

$$\mathscr{Z}^r := \left\{Z(B_{i_1} \times .. \times B_{i_n}) : B_{i_k} \in \mathcal{S}_{i_k},\ \ \underbrace{i_1, .., i_n}_{\substack{\text{paarweise}\\ \text{verschieden}}} \in I\right\}$$

die Menge aller *rechteckigen* Zylindermengen auf $\bigtimes_{i\in I} S_i$.

Hilfsaussage: Erzeugung des unendlichen Produktraumes

Es gilt

$$\sigma(\mathscr{Z}) = \sigma(\mathscr{Z}^r)$$

das heißt $\bigotimes_{i\in I} \mathcal{S}_i$ wird schon allein durch die *rechteckigen* Zylindermengen $Z(B_{i_1} \times .. \times B_{i_n})$ erzeugt.

Beweis: Seien zunächst $\{i_1, .., i_n\} \subseteq I$ fest. Seien $\mathscr{Z}_{i_1..i_n}$ und $\mathscr{Z}^r_{i_1..i_n}$ jeweils die Menge aller Zylindermengen $Z(B),\ B \in \bigotimes_{k=1}^n \mathcal{S}_{i_k}$ und die Menge aller rechteckigen Zylindermengen $Z(B_{i_1} \times .. \times B_{i_n}),\ B_{i_k} \in \mathcal{S}_{i_k}$ auf $\bigtimes_{i\in I} S_i$.
Behauptung: $\mathscr{Z}_{i_1..i_n} = \sigma(\mathscr{Z}^r_{i_1..i_n})$.

Beweis: Offensichtlich ist $\mathscr{Z}_{i_1..i_n}$ eine σ-Algebra auf Ω mit $\mathscr{Z}^r_{i_1..i_n} \subseteq \mathscr{Z}_{i_1..i_n}$. Zu zeigen wäre also: Ist $\mathcal{A} \subseteq \mathscr{P}(\bigtimes_{i\in I} S_i)$ eine weitere σ-Algebra mit $\mathscr{Z}^r_{i_1..i_n} \subseteq \mathcal{A}$, so ist auch $\mathscr{Z}_{i_1..i_n} \subseteq \mathcal{A}$. Sei

$$\mathcal{B}_{\mathcal{A}} := \left\{B \in \bigotimes_{k=1}^n \mathcal{S}_{i_k} : Z(B) \in \mathcal{A}\right\}$$

Dann ist $\mathcal{B}_\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf $\bigtimes_{k=1}^n S_{i_k}$. Wegen $\mathcal{Z}^r_{i_1..i_n} \subseteq \mathcal{A}$, ist $\bigtimes_{k=1}^n \mathcal{S}_{i_k} \subseteq \mathcal{B}_\mathcal{A}$, daher

$$\bigotimes_{k=1}^n \mathcal{S}_{i_k} = \sigma\left(\bigtimes_{k=1}^n \mathcal{S}_{i_k}\right) \subseteq \mathcal{B}_\mathcal{A}$$

das heißt $\mathcal{Z}_{i_1..i_n} \subseteq \mathcal{A}$.

Wegen

$$\mathcal{Z} = \bigcup_{\substack{\{i_1,..,i_n\}\subseteq I \\ n\in\mathbb{N}}} \mathcal{Z}_{i_1..i_n} \quad , \quad \mathcal{Z}^r = \bigcup_{\substack{\{i_1,..,i_n\}\subseteq I \\ n\in\mathbb{N}}} \mathcal{Z}^r_{i_1..i_n}$$

gilt nun

$$\sigma(\mathcal{Z}^r) = \sigma\left[\bigcup_{\substack{\{i_1,..,i_n\}\subseteq I \\ n\in\mathbb{N}}} \underbrace{\sigma(\mathcal{Z}^r_{i_1..i_n})}_{\mathcal{Z}_{i_1..i_n}}\right] = \sigma(\mathcal{Z})$$

□

Aufgabe 01

Sei I eine beliebige Indexmenge und $(S_i, \mathcal{S}_i)_{i\in I}$ eine Familie messbarer Räume, dazu $X_i : \Omega \to S_i$ Zufallsvariablen und

$$(S, \mathcal{S}) := \left(\bigtimes_{i\in I} S_i, \ \bigotimes_{i\in I} \mathcal{S}_i\right)$$

(a) Per Definition ist

$$\mathcal{S} := \sigma(\mathcal{Z})$$

so dass es genügt zu zeigen $X^{-1}(Z) \in \mathcal{A}$ für jede Zylindermenge

$$Z = \left\{(s_i)_{i\in I} \in \bigtimes_{i\in\mathbb{N}} S_i : (s_{i_1}, .., s_{i_n}) \in B\right\} \quad , \quad B \in \bigotimes_{k=1}^n \mathcal{S}_{i_k}, \quad \underbrace{i_1, .., i_k}_{\substack{\text{paarweise} \\ \text{verschieden}}} \in I \tag{0.1}$$

Tatsächlich ist

$$X^{-1}(Z) = \underbrace{(X_{i_1}, .., X_{i_n})^{-1}(B)}_{\substack{\in\mathcal{A} \\ \text{nach Serie 03, Aufg. 3(e)}}} \in \mathcal{A}$$

(b) Zu zeigen wäre: $\sigma(\mathbf{X})$ ist die kleinste σ-Algebra bzgl. der alle $X_k, \ k \in I$ messbar sind. Tatsächlich, gilt für $B \in \mathcal{S}_k$:

$$X_k^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X_k(\omega) \in B\} = \{\omega \in \Omega : X_k \in B, \ X_i \in S_i, \ i \neq k\}$$

$$= X^{-1}\Bigg(\underbrace{\left\{(s_i)_{i\in I} \in \bigtimes_{i\in I} S_i : s_k \in B\right\}}_{\text{Zylindermenge}}\Bigg) \in X^{-1}(\mathcal{S}) = \sigma(X)$$

das heißt $\sigma(X_i : i \in I) \subseteq \sigma(\mathbf{X})$. Anderseits gilt für rechteckige Zylindermengen

$$Z(B_{i_1} \times .. \times B_{i_n}) \in \mathcal{Z}^r \quad , \quad B_{i_k} \in \mathcal{S}_{i_k}, \quad \underbrace{i_1, .., i_k}_{\substack{\text{paarweise} \\ \text{verschieden}}} \in I$$

stets

$$X^{-1}(Z) = \{\omega \in \Omega : X_{i_1}(\omega) \in B_{i_1}, .., X_{i_n}(\omega) \in B_{i_n}\} = \bigcap_{k=1}^n \underbrace{X_{i_k}^{-1}(B_{i_k})}_{\in\sigma(X_i : i\in I)} \in \sigma(X_i : i \in I)$$

das heißt

$$X^{-1}(\mathscr{Z}^r) \subseteq \sigma(X_i : i \in I)$$

Nach Hilfsaussage folgt dann

$$\sigma(\mathbf{X}) = X^{-1}\Big(\underbrace{\bigotimes_{i\in I} \mathcal{S}_i}_{\substack{\sigma(\mathscr{Z}^r)\\ \text{nach}\\ \text{Hilfsaussage}}} \Big) = \sigma(X^{-1}(\mathscr{Z}^r)) \subseteq \sigma(X_i : i \in I)$$

(c) Seien $(X_i)_{i\in I}$ unabhängig. Nach Kolmogorov ist $\mathcal{P} := \bigotimes_{i\in I} \mathcal{P}_{X_i}$ existent und eindeutig bestimmt durch die Eigenschaft

$$\mathcal{P}\left(Z(B_{i_1} \times \cdots \times B_{i_n})\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathcal{P}_{X_{i_k}}(B_{i_k}) \quad \forall\ B_{i_k} \in \mathcal{S}_{i_k},\ \{i_1, .., i_n\} \subseteq I$$

Doch tatsächlich gilt

$$\mathcal{P}_{\mathbf{X}}\left(Z(B_{i_1} \times \cdots \times B_{i_n})\right) = \mathcal{P}_{(X_{i_1},..,X_{i_n})}(B_{i_1} \times .. \times B_{i_n}) \overset{X_{i_k} \text{ unabh.}}{=} \prod_{k=1}^{n} \mathcal{P}_{X_{i_k}}(B_{i_k})$$

□

Aufgabe 02

(a) Sei F_X die Verteilungsfunktion von X auf $\mathbb{R}$, das heißt $F_X(t) := \mathcal{P}(X \leq t)$. Setze

$$a := \inf\left\{t \in \mathbb{R} : F_X(t) \geq \frac{1}{2}\right\}$$

und beachte dass tatsächlich $a \in \mathbb{R}$, da

$$\lim_{t\to\infty} F_X(t) = 1,\ \lim_{t\to-\infty} F_X(t) = 0$$

Da F_X rechtsseitig stetig ist, muss $F_X(a) \geq \frac{1}{2}$. Per Konstruktion außerdem

$$F_X(t) < \frac{1}{2} \quad \forall\ t < a \tag{0.2}$$

Schließlich muss gelten

$$\mathcal{P}(X \geq a) = \mathcal{P}(X < a) + \mathcal{P}(X = a) = (1 - F_X(a)) + \big(F_X(a) - \lim_{t\nearrow a} F_X(a)\big) = 1 - \underbrace{\lim_{t\nearrow a} F_X(a)}_{\substack{\leq \frac{1}{2}\\ \text{nach (0.2)}}} \geq \frac{1}{2}$$

(b) Zur Zufallsvariablen

$$X : \Big(\underbrace{\{0,1\}}_{\Omega}, \underbrace{\mathscr{P}(\{0,1\})}_{\mathfrak{S}}, \underbrace{\frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_1)}_{\mathcal{P}}\Big) \to \mathbb{R} \quad , \quad X(k) = k,\ k \in \{0,1\}$$

sind alle Zahlen $a \in [0,1]$ Mediane.

(c) Wegen

$$\mathcal{P}(a_1 < X < a_2) = 1 - \underbrace{\mathcal{P}(X \leq a_1)}_{\geq \frac{1}{2}} - \underbrace{\mathcal{P}(X \geq a_2)}_{\geq \frac{1}{2}} \leq 0$$

ist $\mathcal{P}(a_1 < X < a_2) = 0$.

(d)
- Normalverteilung: Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ normalverteilt um den Mittelwert a mit der Dichte

$$\frac{d\mathcal{P}_X}{d\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} =: \rho(|x-a|)$$

Dann gilt

$$\mathcal{P}(X \le a) = \int_{-\infty}^{a} \rho(|x-a|)\ dx \overset{u:=2a-x}{=} \int_{a}^{\infty} \underbrace{\rho(|a-u|)}_{\rho(|u-a|)}\ du = \mathcal{P}(X \ge a)$$

bzw.

$$\mathcal{P}\left(X \ge a\right) = \overbrace{1 - \mathcal{P}(X \ge a)}^{\mathcal{P}(X<a)} + \mathcal{P}(X = a)$$

und somit

$$\mathcal{P}(X \ge a) = \frac{1}{2}\left(1 + \mathcal{P}(X = a)\right) \ge \frac{1}{2}$$

Ganz analog auch $\mathcal{P}(X \le a) \ge \frac{1}{2}$. Da ρ nirgends 0 ist, ist der Median nach (c) eindeutig bestimmt.
- Diskrete Gleichverteilung: Aus $\mathcal{P}_X(X = x_i) = \frac{1}{2N+1}$ folgt direkt dass

$$a := x_{N+1}$$

der Median von X ist, denn

$$\mathcal{P}(X \le a) = \mathcal{P}(X \ge a) = \frac{N+1}{2N+1} \ge \frac{1}{2}$$

(e) Definitionsgemäß ist X symmetrisch falls $X \overset{\mathrm{d}}{=} -X$. Insbesondere gilt dann

$$\mathcal{P}(X \le 0) = \mathcal{P}(X \ge 0)$$

Analog zu vorhin ist also

$$\underbrace{\mathcal{P}(X \le 0)}_{\substack{\mathcal{P}(-X \le 0) \\ = \mathcal{P}(X \ge 0)}} = (1 - \mathcal{P}(X \le 0)) + \mathcal{P}(X = 0) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}(X \le 0) = \frac{1}{2}\left(1 + \mathcal{P}(X = 0)\right) \ge \frac{1}{2}$$

(f) Sei a Median von X.

- Median von cX: Sei zunächst $c > 0$. Wegen

$$\mathcal{P}(cX \ge ca) = \mathcal{P}(X \ge a) \ge \frac{1}{2} \quad , \quad \mathcal{P}(cX \le ca) = \mathcal{P}(X \le a) \ge \frac{1}{2}$$

ist ca Median von cX. Ähnlich auch im Fall $c < 0$:

$$\mathcal{P}(cX \ge ca) = \mathcal{P}(X \le a) \ge \frac{1}{2} \quad , \quad \mathcal{P}(cX \le ca) = \mathcal{P}(X \ge a) \ge \frac{1}{2}$$

Im Fall $c = 0$ ist $\mathcal{P}_{cX} = \delta_0$, cX besitzt also offensichtlich auch den Median $0 = 0 \cdot a$.
- Median von $X + c$: Aus

$$\mathcal{P}(X + c \ge a + c) = \mathcal{P}(X \ge a) \ge \frac{1}{2} \quad , \quad \mathcal{P}(X + c \le a + c) = \mathcal{P}(X \le a) \ge \frac{1}{2}$$

ist ersichtlich dass $X + c$ den Median $a + c$ besitzt,

Aufgabe 03

O.B.d.A. konstruieren unabhängige, identisch verteilte $X_1, X_2, ..$ auf $([0,1), \mathscr{B}([0,1), \lambda_1)$. Deren Fortsetzung

$$\widetilde{X}_k(t) := \begin{cases} X_k(t) & : t \in [0,1) \\ 0 & : t = 1 \end{cases}$$

erhält dabei alle gewünschten Eigenschaften, da der Vektor $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die gleiche Verteilung wie $(\widetilde{X}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ besitzt.

Konstruktion der X_n

Setze

$$a_1^1 := 0,\ a_2^1 := (1-p),\ l_1^1 := (1-p),\ l_2^1 := p$$

so dass

$$[0,1) = [a_1^1, a_1^1 + l_1^2) \dot\cup [a_2^1, a_2^1 + l_2^1)$$

und

$$X_1 := 1_{[a_2^1, a_2^1 + l_2^1)}$$

Gegeben seien nun die n ersten Zufallsvariablen $X_k : [0,1) \to (\{0,1\}, \mathscr{P}(\{0,1\}))$, $k \leq n$ und die disjunkte Zerlegung

$$[0,1) = \biguplus_{i=1}^{2n} [a_i^n, a_i^n + l_i^n) \quad , \quad 0 \leq a_i^n, l_i^n \leq 1,\ a_{i+1}^n = a_i^n + l_i^n \tag{0.3}$$

des Intervalls $[0,1)$. Dann definiere die neue disjunkte Zerlegung

$$[0,1) = \biguplus_{i=1}^{2^{n+1}} \left[a_i^{n+1}, a_i^{n+1} + l_i^{n+1}\right) \tag{0.4}$$

wobei

$$\begin{aligned} &l_{2k-1}^{n+1} := l_k^n \cdot (1-p) \quad , \quad l_{2k}^{n+1} := l_k^n \cdot p \\ &a_{2k-1}^{n+1} := a_k^n \quad , \quad a_{2k}^{n+1} := a_{2k-1}^{n+1} + l_{2k-1}^{n+1} \quad , \quad k = 1,..,2^n \end{aligned}$$

Beachte dass dies tatsächlich auch eine disjunkte Zerlegung von $[0,1)$, gar eine Verfeinerung ist, denn

$$[a_k^n, a_k^n + l_k^n) = \left[a_{2k-1}^{n+1}, a_{2k-1}^{n+1} + l_{2k-1}^{n+1}\right) \dot\cup \left[a_{2k}^{n+1}, a_{2k}^{n+1} + l_{2k}^{n+1}\right) \tag{0.5}$$

Definiere ferner die $(n+1)$ -te Zufallsvariable

$$X_{n+1} := \sum_{k=1}^{2^n} \underbrace{1_{[a_k^n + l_k^n \cdot (1-p), a_k^n + l_k^n)}}_{1_{\left[a_{2k}^{n+1}, a_{2k}^{n+1} + l_{2k}^{n+1}\right)}} \tag{0.6}$$

Dabei ist

$$\mathcal{P}(X_{n+1} = 1) = \sum_{i=1}^{2^n} [l_i^n - l_i^n \cdot (1-p)] = p \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{2^n} l_i^n}_{1} = p$$

bzw. $\mathcal{P}(X_{n+1} = 0) = (1-p)$.

Unabhängigkeit

Zu zeigen ist: Für $n \in \mathbb{N}$ sind $X_1, .., X_n$ unabhängig. Da X_1 alleine unabhängig ist, genügt es zu zeigen dass aus der Unabhängigkeit der $X_1, .., X_n$ auch die Unabhängigkeit der $X_1, .., X_{n+1}$ folgt. Tatsächlich, gilt für $t_1, .., t_{n+1} \in \{0,1\}$ und Darstellung

$$\{X_1 = t_1, \ldots, X_n = t_n\} = \biguplus_{i=1}^{N} \left[a_{k_i}^n, a_{k_i}^n + l_{k_i}^n\right) \quad , \quad k_i \in \{1, .., 2^n\}$$

(beachte dass dies nach Konstruktion (0.6) und der Zerlegung (0.4) stets möglich ist) entsprechend

$$\mathcal{P}\left(X_1 = t_1, \dots, X_{n+1} = t_{n+1}\right) = \mathcal{P}\left(\{X_1 = t_1, \dots, X_n = t_n\} \cap \{X_{n+1} = t_{n+1}\}\right)$$

$$= \lambda\left[\biguplus_{i=1}^{N}\left[a_{k_i}^n, a_{k_i}^n + l_{k_i}^n\right) \cap \{X_{n+1} = t_{n+1}\}\right] = \begin{cases} \lambda\left[\biguplus_{i=1}^{N}\left[a_{k_i}^n, a_{k_i}^n + l_{k_i}^n \cdot (1-p)\right)\right] & : t_{n+1} = 0 \\ \lambda\left[\biguplus_{i=1}^{N}\left[a_{k_i}^n + l_{k_i}^n \cdot (1-p), a_{k_i}^n + l_{k_i}^n\right)\right] & : t_{n+1} = 1 \end{cases}$$

$$= \left\{\begin{array}{ll} (1-p) \cdot \sum_{i=1}^{N} l_{k_i}^n & : t_{n+1} = 0 \\ p \cdot \sum_{i=1}^{N} l_{k_i}^n & : t_{n+1} = 1 \end{array}\right\} = \mathcal{P}(X_{n+1} = t_{n+1}) \cdot \sum_{i=1}^{N} l_{k_i}^n$$

$$= \mathcal{P}(X_{n+1} = t_{n+1}) \cdot \underbrace{\lambda\left[\biguplus_{i=1}^{N}\left[a_{k_i}^n, a_{k_i}^n + l_{k_i}^n\right)\right]}_{\mathcal{P}(X_1 = t_1, .., X_n = t_n)} \stackrel{\text{Vor.}}{=} \mathcal{P}(X_{n+1} = t_{n+1}) \cdot \prod_{k=1}^{n} \mathcal{P}(X_k = t_k)$$

Aufgabe 04

(a) Seien $(S_k, \mathcal{S}_k)_{k=1}^n$ messbare Räume und $X, Y : (\Omega, \mathfrak{S}, \mathcal{P}) \to \left(\bigtimes_{k=1}^{n} S_k, \bigotimes_{k=1}^n \mathcal{S}_k\right)$ identisch verteilte, zufällige Vektoren. Dann gilt insbesondere

$$\mathcal{P}_{X_k}(B_k) = \mathcal{P}_{(X_1,..,X_n)}(S_1 \times \dots \times S_{k-1} \times B_k \times S_{k+1} \times \dots \times S_n)$$

$$= \mathcal{P}_{(Y_1,..,Y_n)}(S_1 \times \dots \times S_{k-1} \times B_k \times S_{k+1} \times \dots \times S_n) = \mathcal{P}_{Y_k}(B_k) \quad \forall\ B_k \in \mathcal{S}_k$$

bzw. $X_k \stackrel{\text{d}}{=} Y_k \ \ \forall\ k$.

(b) Aufgrund der Symmetrie der Behauptung, genügt es zu zeigen, dass die Unabhängigkeit der $X_1, .., X_n$ die Unabhängigkeit der $Y_1, .., Y_n$ impliziert. Tatsächlich, sind $X_1, .., X_n$ unabhängig, so folgt

$$\mathcal{P}_Y = \mathcal{P}_X = \bigotimes_{k=1}^{n} \underbrace{\mathcal{P}_{X_k}}_{= \mathcal{P}_{Y_k}} = \bigotimes_{k=1}^{n} \mathcal{P}_{Y_k}$$

und somit die Unabhängigkeit der $Y_1, .., Y_n$.

□