Stochastik II (Wahrscheinlichkeitstheorie) 2009/10

5. Serie

1. Gegeben seien ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, messbare Räume $(S_i, \mathcal{S}_i)$ und Zufallsvariable $X_i : \Omega \to S_i$ , $i = 1, 2, \ldots$. Die Menge $S := \times_{i=1}^{\infty} S_i$ versehe man mit der Produkt–$\sigma$–Algebra $\mathcal{S} = \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{S}_i$. Dann definiert man $\vec{X} : \Omega \to S$ durch

$$\vec{X}(\omega) := (X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots) , \quad \omega \in \Omega .$$

   (a) Zeigen Sie, dass $\vec{X}$ eine Zufallsvariable mit Werten in $(S, \mathcal{S})$ ist.

   (b) Beweisen Sie $\sigma\big(X_i : i \in \mathbb{N}\big) = \sigma(\vec{X})$.

   (c) Man zeige, dass die Zufallsvariablen $X_i$ dann und nur dann unabhängig sind, wenn

$$\mathbb{P}_{\vec{X}} = \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}_{X_i}$$

   gilt.

2. Für eine zufällige Größe $X$ heißt $a \in \mathbb{R}$ Median von $X$ wenn sowohl $\mathbb{P}(X \geq a) \geq 1/2$ als auch $\mathbb{P}(X \leq a) \geq 1/2$ gilt.

   (a) Zeigen Sie, dass jede zufällige Größe einen Median besitzt.

   (b) Geben Sie ein Beispiel, wo der Median nicht eindeutig bestimmt ist.

   (c) Seien $a_1 < a_2$ beide Median von $X$. Was kann man über $\mathbb{P}(a_1 < X < a_2)$ aussagen ?

   (d) Bestimmen Sie den Median einer $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$–verteilten und einer auf $x_1, \ldots, x_{2N+1} \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < \cdots < x_{2N+1}$ gleichverteilten zufälligen Größe.

   (e) Wenn $X$ symmetrisch ist, so ist die Zahl 0 Median von $X$. Beweisen Sie dies.

   (f) Für $c \in \mathbb{R}$ drücke man den Median von $c \cdot X$ und $X + c$ mit Hilfe des Medians von $X$ aus.

3. Für eine Zahl $p \in (0, 1)$ konstruiere man unabhängige zufällige Größen $X_1, X_2, \ldots$ auf $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda_1)$ mit

$$\mathbb{P}(X_j = 0) = 1 - p \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(X_j = 1) = p$$

   für $j = 1, 2, \ldots$.
   *Hinweis:* Man teile das Intervall $[0, 1]$ in zwei Intervalle der Länge $1 - p$ und $p$ ein, danach diese beiden Intervalle wieder in Intervalle im Verhältnis $1 - p$ und $p$ usw.

4. Wie üblich bedeutet für zwei Zufallsvariable $X$ und $Y$ die Gleichung $X \stackrel{d}{=} Y$, dass $X$ und $Y$ identisch verteilt sind, d.h. das gleiche Verteilungsgesetz besitzen. Gegeben seien nun zwei zufällige ($\mathbb{R}^n$–wertige) Vektoren $X = (X_1, \ldots, X_n)$ und $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ mit $X \stackrel{d}{=} Y$.

   (a) Zeigen Sie, dass dann auch $X_i \stackrel{d}{=} Y_i$ für $1 \leq i \leq n$ folgt.

   (b) Beweisen Sie, dass $X_1, \ldots, X_n$ dann und nur dann unabhängig sind, wenn dies für $Y_1, \ldots, Y_n$ richtig ist.

Abgabe: 24. 11. 09