Wahrscheinlichkeitstheorie
FSU Jena - WS 09/10
Serie 04 - Lösungen

Stilianos Louca

February 22, 2010

Aufgabe 01

Vorbemerkung: Trifft eine Aussage $p(\omega)$ $\mathcal{P}\mid_{\mathcal{C}}$ -fast sicher zu, so trifft sie auch $\mathcal{P}$ -fast sicher zu, denn $\mathcal{P}\mid_{\mathcal{C}}$ -Nullmengen sind natürlich auch $\mathcal{P}$-Nullmengen.

Eigenschaften der bedingten Wahrscheinlichkeit

(a) Per Konstruktion gilt

$$\underbrace{\mathcal{P}(\Omega\cap C)}_{\mathcal{P}(C)} = \int\limits_{(C,\mathcal{C})} \mathcal{P}(\Omega\mid\mathcal{C})\ d\mathcal{P}\ \ \forall\ C\in\mathcal{C}$$

das heißt $\mathcal{P}(\Omega\mid\mathcal{C})$ ist die $\mathcal{P}\mid_{\mathcal{C}}$-fast eindeutig bestimmte, $\mathcal{C}$-messbare Dichte (vgl. Radon-Nikodym) von $\mathcal{P}\mid_{\mathcal{C}}$ bzgl. $\mathcal{P}\mid_{\mathcal{C}}$, sprich $\mathcal{P}(\Omega\mid\mathcal{C})=1$ $\mathcal{P}\mid_{\mathcal{C}}$-fast sicher. Ähnlich ist

$$\underbrace{\mathcal{P}(\emptyset\cap\mathcal{C})}_{0} = \int\limits_{(C,\mathcal{C})} \mathcal{P}(\emptyset\mid\mathcal{C})\ d\mathcal{P}\ \ \forall\ C\in\mathcal{C}$$

das heißt $\mathcal{P}(\emptyset\mid\mathcal{C})=0$ ist $\mathcal{P}\mid_{\mathcal{C}}$-fast sicher[1].

(b) Seien $A_1,A_2,..\in\mathcal{A}$ disjunkt. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\int\limits_{(C,\mathcal{C})}\sum_{j=1}^{\infty}\mathcal{P}(A_j\mid\mathcal{C})\ d\mathcal{P} &= \sum_{j=1}^{\infty}\int\limits_{(C,\mathcal{C})}\mathcal{P}\left(A_j\mid\mathcal{C}\right)\ d\mathcal{P}\\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\mathcal{P}\left(A_j\cap C\right) = \mathcal{P}\left(\biguplus_{j=1}^{\infty}A_j\cap C\right)\\ &= \int\limits_{(C,\mathcal{C})}\mathcal{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j\mid\mathcal{C}\right)\ d\mathcal{P}\ \ \forall\ C\in\mathcal{C}\end{aligned}$$

---

[1] Für messbare $f:(\Omega,\mathcal{C},\mathcal{P})\to\mathbb{R}$ mit $\int_C f\ d\mathcal{P}=0\ \forall\ C\in\mathcal{C}$ gilt $f=0$ $\mathcal{P}$-fast sicher, denn sonst müsse

$$\int\limits_{\{f>0\}} f\ d\mathcal{P}>0 \qquad \text{oder} \qquad \int\limits_{\{f<0\}} f\ d\mathcal{P}<0$$

sein.

das heißt

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{P}(A_j \mid \mathcal{C})(\omega) = \mathcal{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \mid \mathcal{C}\right)(\omega)$$

$\mathcal{P} \mid_{\mathcal{C}}$-fast sicher (vgl. Radon-Nikodym). Beachte dass hier verwendet wurde, dass

$$Y_n := \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\mathcal{P}(A_j \mid \mathcal{C})}_{\substack{\geq 0 \\ \text{nach Beweis} \\ \text{Serie 02, Aufg. 02}}} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

von unten, mit $n \to \infty$ punktweise gegen

$$Y := \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{P}(A_j \mid \mathcal{C})$$

konvergiert und so nach Satz über monotone Konvergenz von Bepo levi, gilt

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{\infty}}_{\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n}} \int\limits_{(C,\mathcal{C})} \mathcal{P}(A_j \mid \mathcal{C}) \, d\mathcal{P} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{(C,\mathcal{C})} Y_n \, d\mathcal{P} = \int\limits_{(C,\mathcal{C})} Y \, d\mathcal{P}$$

□

Die bedingte Wahrscheinlichkeit als Wahrscheinlichkeitsmaß

Aus obigen Eigenschaften folgt **nicht**, dass für $\mathcal{P}$-fast alle ω, die Abbildung $\mu_\omega : A \mapsto \mathcal{P}(A \mid \mathcal{C})(\omega)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist. Denn zwar gilt nach (b) für jede disjunkte Folge $A_1, A_2, .. \in \mathcal{A}$ eine gewisse σ-*additivität* für alle $\omega \in N^c$ ($N \in \mathcal{A}$ geeignete $\mathcal{P}$-Nullmenge):

$$\mu_\omega\left(\biguplus_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_\omega(A_j) \tag{0.1}$$

doch kann diese Nullmenge N von den jeweils vorliegenden $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ abhängen. Es ist nicht gesichert, dass es eine *einheitliche* Nullmenge $N_{\text{all}} \in \mathcal{A}$ gibt, mit (0.1) $\forall \, \omega \notin N_{\text{all}}$.

Spezialfall

Sind $C_1, .., C_n \in \mathcal{A}$ eine disjunkte Zerlegung von Ω und $\mathcal{C} := \sigma\{C_1, .., C_n\}$, so folgt nach Serie 02, Aufgabe 02 die Darstellung

$$\mathcal{P}(A \mid \mathcal{C}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1_{C_j}}{\mathcal{P}(C_j)} \underbrace{\int\limits_{(C_j,\mathcal{A})} 1_A \, d\mathcal{P}}_{\mathcal{P}(A\cap C_j)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathcal{P}(A \cap C_j)}{\mathcal{P}(C_j)} \cdot 1_{C_j}$$

Aufgabe 02

(a) Da Erwartungswerte nur vom Verteilungsgesetz abhängen, gilt

$$\mathbb{E}X \overset{X \overset{\text{d}}{=} -X}{=} \mathbb{E}(-X) \overset{\text{Linearität}}{=} -\mathbb{E}X$$

sprich $\mathbb{E}X = 0$.

(b) Betrachtet sei die messbare Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g(x,y) := x + y$. Nach Voraussetzungen können wir schreiben

$$\underbrace{\mathcal{P}_{X_1+X_2}}_{\mathcal{P}_{g\circ(X_1,X_2)}} = \mathcal{P}_{(X_1,X_2)} \circ g^{-1} \overset{\substack{X_1,X_2\\ \text{unabhängig}}}{=} \big(\underbrace{\mathcal{P}_{X_1}}_{\mathcal{P}_{-X_1}} \otimes \underbrace{\mathcal{P}_{X_2}}_{\mathcal{P}_{-X_2}} \big) \circ g^{-1} \overset{\substack{-X_1,-X_2\\ \text{unabhängig}}}{=} \mathcal{P}_{(-X_1,-X_2)} \circ g^{-1} = \underbrace{\mathcal{P}_{g\circ(-X_1,-X_2)}}_{\mathcal{P}_{-X_1-X_2}}$$

das heißt $X_1 + X_2 \overset{\mathrm{d}}{=} -(X_1 + X_2)$.

(c) Betrachtet sei die messbare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) := x - y$. Nach Voraussetzungen gilt

$$\underbrace{\mathcal{P}_{X-X'}}_{\mathcal{P}_{f(X,X')}} = \mathcal{P}_{(X,X')} \circ f^{-1} = (\underbrace{\mathcal{P}_X}_{\mathcal{P}_{X'}} \otimes \underbrace{\mathcal{P}_{X'}}_{\mathcal{P}_X}) \circ f^{-1} = \underbrace{(\mathcal{P}_{X'} \otimes \mathcal{P}_X)}_{\mathcal{P}_{(X',X)}} \circ f^{-1} = \mathcal{P}_{f(X',X)} = \mathcal{P}_{X'-X}$$

(d) Da X, X' unabhängig sind, gilt

$$\mathcal{P}_{X-X'} = \mathcal{P}_{X+(-X')} = \mathcal{P}_X * \mathcal{P}_{-X'} \tag{0.2}$$

Ist $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ invertierbar, differenzierbar mit $h' \neq 0$ und ρ die Dichte von $\mathcal{P}_X$, so gilt

$$\mathcal{P}_{h(X)}(A) = \mathcal{P}_X(h^{-1}(A)) = \int\limits_{h^{-1}(A)} \rho \ d\lambda = \int\limits_A \rho(h^{-1}) \ \underbrace{d(\lambda \circ h^{-1})}_{|(h^{-1})'| \ d\lambda} = \int\limits_A \rho(h^{-1}) \cdot \left|(h^{-1})'\right| \ d\lambda \qquad \forall\ A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$$

das heißt

$$\rho_h := \rho(h^{-1}) \cdot \left|h^{-1}\right|' \tag{0.3}$$

ist die fast-eindeutig bestimmte Dichte von $\mathcal{P}_{h(X)}$. Speziell für $h(x) := -x$, folgt

$$\frac{d\mathcal{P}_{-X}}{d\lambda}(x) = \frac{d\mathcal{P}_X}{d\lambda}(-x) \tag{0.4}$$

Anderseits besitzt die Faltung zweier Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ mit jeweils Dichten p, q, die Dichte $p*q$, denn

$$(\mathcal{P} * \mathcal{Q})(A) = \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} 1_A(x+y) \cdot p(x) \cdot q(y) \ dx \ dy \overset{z:=x+y}{=} \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} 1_A(z) \cdot p(x) \cdot q(z-x) \ dx \ dz$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} 1_A(z) \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}} p(x) q(z-x) \ dx}_{(p*q)(z)} \ dz = \int\limits_A (p*q)(z) \ dz$$

Somit besitzt insbesondere $\mathcal{P}_{X-X'}$ die Dichte

$$\frac{d\mathcal{P}_{X-X'}}{d\lambda} \overset{(0.2)}{=} \frac{d}{d\lambda}\left(\mathcal{P}_X * \mathcal{P}_{-X'}\right) = \left[\frac{\mathcal{P}_X}{d\lambda} * \frac{d\mathcal{P}_{-X'}}{d\lambda}\right] \overset{(0.4)}{=} \left[\frac{\mathcal{P}_X}{d\lambda} * \left(z \mapsto \frac{d\mathcal{P}_X}{d\lambda}(-z)\right)\right]$$

sprich

$$\frac{d\mathcal{P}_{X-X'}}{d\lambda}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{P}_X}{d\lambda}(z) \cdot \frac{d\mathcal{P}_X}{d\lambda}(z-x) \ dz \tag{0.5}$$

(e) Nach (0.5) besitzt $(X - X')$ die Dichte

$$\frac{d\mathcal{P}_{X-X'}}{d\lambda}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \lambda e^{-\lambda z} 1_{(0,\infty)}(z) \cdot \lambda e^{-\lambda(z-x)} 1_{(0,\infty)}(z-x) \ dz = \lambda^2 e^{\lambda x} \underbrace{\int\limits_{(x,\infty)} e^{-2\lambda z} \ dz}_{e^{-2\lambda x}/(2\lambda)} = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda x} \quad , \quad x \geq 0$$

Aufgabe 03

Offensichtlich sind $\mathbb{E}(\alpha_j \varepsilon_j) = 0 \;\; \forall\, j$ also auch

$$\mathbb{E} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varepsilon_j = 0$$

Daher ist

$$\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varepsilon_j\right|^2 = \mathbb{V} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varepsilon_j \overset{\substack{\text{Bienaymé \&} \\ \alpha_j \varepsilon_j \text{ unabhängig}}}{=} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\mathbb{V}(\alpha_j \varepsilon_j)}_{\alpha_j^2 \mathbb{V} \varepsilon_j} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 \cdot \underbrace{\mathbb{E}\,|\varepsilon_j|^2}_{1} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2$$

Ferner ist

$$\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varepsilon_j\right|^4 = \mathbb{E} \sum_{j_1,..,j_4=1}^{n} \alpha_{j_1}..\alpha_{j_4} \varepsilon_{j_1}..\varepsilon_{j_4} = \sum_{j_1,..,j_4=1}^{n} \alpha_{j_1}..\alpha_{j_4} \mathbb{E}\left(\varepsilon_{j_1}..\varepsilon_{j_4}\right)$$

Wobei $\mathbb{E}(\varepsilon_{j_1}..\varepsilon_{j_4})$ nur in einem der 4 Fälle nicht verschwindet:

- $j_1 = j_2 = j_3 = j_4$
- $j_1 = j_2 \neq j_3 = j_4$
- $j_1 = j_3 \neq j_2 = j_4$
- $j_1 = j_4 \neq j_2 = j_3$

Daher kann man schreiben:

$$\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varepsilon_j\right|^4 = 3 \sum_{i \neq k} |\alpha_i|^2 \, |\alpha_k|^2 \underbrace{\mathbb{E}(\varepsilon_i^2) \cdot \mathbb{E}(\varepsilon_k^2)}_{1} + \sum_{i} |\alpha_i|^4 \underbrace{\mathbb{E}(\varepsilon_i^4)}_{1} = 3 \sum_{i \neq k} |\alpha_i|^2 \, |\alpha_k|^2 + \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^4$$