Stochastik II (Wahrscheinlichkeitstheorie) 2009/10

4. Serie

1. Für einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, eine Teil–$\sigma$–Algebra $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ und eine zufällige Größe X mit $\mathbb{E}\,|X| < \infty$ sei der bedingte Erwartungswert $\mathbb{E}\,(X|\,\mathcal{C})$ wie in Aufgabe 2 der 2. Serie definiert. Damit erklärt man nun für $A \in \mathcal{A}$ die bedingte Wahrscheinlichkeit durch
$$\mathbb{P}(A\,|\,\mathcal{C}) := \mathbb{E}\,(\mathbb{1}_A\,|\,\mathcal{C})\ .$$
D.h., $\mathbb{P}(A\,|\,\mathcal{C})$ ist diejenige $\mathbb{P}$–fast sicher eindeutig bestimmte $\mathcal{C}$–messbare Größe Y_A, die
$$\mathbb{P}(A \cap C) = \int_C Y_A(\omega)\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)$$
für alle $C \in \mathcal{C}$ erfüllt.
Beweisen Sie folgende Eigenschaften der bedingten Wahrscheinlichkeit:
   (a) Für fast alle $\omega \in \Omega$ gilt $\mathbb{P}(\Omega\,|\,\mathcal{C})(\omega) = 1$ und $\mathbb{P}(\emptyset\,|\,\mathcal{C})(\omega) = 0$.
   (b) Sind $A_1, A_2, \ldots$ disjunkte Mengen aus $\mathcal{A}$, so gilt für $\mathbb{P}$–fast alle $\omega \in \Omega$
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\,\Big|\,\mathcal{C}\right)(\omega) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(A_j\,|\,\mathcal{C}\right)(\omega)\ .$$
   Hinweis: Man zeige dies zuerst für endlich viele A_j und verwende dann den Satz über die monotone Konvergenz für bedingte Erwartungswerte. [1]

   Folgt aus diesen Eigenschaften der bedingten Wahrscheinlichkeit, dass eine messbare Menge $N \subseteq \Omega$ mit $\mathbb{P}(N) = 0$ existiert, so dass für $\omega \notin N$ die Abbildung
$$A \longrightarrow \mathbb{P}(A\,|\,\mathcal{C})(\omega)$$
ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ ist ?
   Bestimmen Sie $\mathbb{P}(A\,|\,\mathcal{C})$ im Fall $\mathcal{C} = \sigma\{C_1, \ldots, C_n\}$ mit $C_j \in \mathcal{A}$ disjunkt, $\bigcup_{j=1}^n C_j = \Omega$ und $\mathbb{P}(C_j) > 0$.

2. Eine zufällige Größe X heißt *symmetrisch*, sofern $X \stackrel{d}{=} -X$ gilt.
   (a) Beweisen Sie $\mathbb{E}\ X = 0$ für jede symmetrische zufällige Größe X mit $\mathbb{E}\ |X| < \infty$.
   (b) Zeigen Sie, dass für zwei unabhängige symmetrische zufällige Größen X_1 und X_2 auch $X_1 + X_2$ symmetrisch ist.
   (c) Sei X eine beliebige zufällige Größe und sei X' eine unabhängige Kopie von X, d.h. X und X' sind identisch verteilt und unabhängig, so beweise man, dass $\tilde{X} := X - X'$ stets symmetrisch ist ($\tilde{X}$ nennt man die Symmetrisierung von X).
   (d) Drücken Sie das Verteilungsgesetz der Symmetrisierung $\tilde{X}$ durch das von X aus. Welche Dichte hat $\mathbb{P}_{\tilde{X}}$, wenn $\mathbb{P}_X$ die Dichte p besitzt ?
   (e) Berechnen Sie die Verteilung der Symmetrisierung einer exponentiell verteilten zufälligen Größe X, d.h. $\mathbb{P}_X$ hat die Dichte $p(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$ mit einem $\lambda > 0$.

3. Mit $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ bezeichne man eine Bernoulli–Folge, d.h. die zufälligen Größen ε_j sind unabhängig und identisch verteilt mit $\mathbb{P}(\varepsilon_j = -1) = \mathbb{P}(\varepsilon_j = 1) = 1/2$. Berechnen Sie für beliebige $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ die Momente
$$\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^n \alpha_j \varepsilon_j\right|^2 \quad \text{und} \quad \mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^n \alpha_j \varepsilon_j\right|^4 .$$

Abgabe: 17. 11. 09

[1] In welcher Form muss ein Satz über die monotone Konvergenz bedingter Erwartungswerte formuliert werden ? Man kann diesen Satz beweisen, ihn aber auch einfach ohne Beweis anwenden.