Wahrscheinlichkeitstheorie
FSU Jena - WS 09/10
Serie 03 - Lösungen

Stilianos Louca

November 17, 2009

Aufgabe 01

(a) Zu zeigen wäre: Für $J \subseteq \{1, .., n\}$ und $E_j \in \mathcal{E}_j,\ j \in J$ ist

$$\mathcal{P}\left(\bigcap_{j\in J} E_j\right) = \prod_{j\in J} \mathcal{P}(E_j)$$

Dabei reicht es zu zeigen: Für $E_j \in \mathcal{E}_j,\ 2 \leq j \leq n$ gilt

$$\mathcal{P}\left(E_2 \cap \cdots \cap E_n\right) = \mathcal{P}(E_2) \cdot .. \cdot \mathcal{P}(E_n)$$

Der allgemeinere Fall folgt durch Induktion zusammen mit der Gleichwertigkeit der $\mathcal{E}_j$.

Sei also $\Omega = \biguplus_{m=1}^{\infty} E_1^m$ disjunkte Vereinigung von Mengen $E_1^m \in \mathcal{E}_1$, dann gilt

$$\underbrace{\mathcal{P}\left(E_2 \cap \cdots \cap E_n\right)}_{\mathcal{P}(\Omega\cap E_2\cap\cdots\cap E_n)} = \mathcal{P}\underbrace{\left[\left(\biguplus_{m\in\mathbb{N}} E_1^m\right) \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n\right]}_{\biguplus_{m\in\mathbb{N}}\left(E_1^m\cap E_2\cap\cdots\cap E_n\right)} = \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{\mathcal{P}\left(E_1^m \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n\right)}_{\mathcal{P}(E_1^m)\cdot\prod_{j=2}^n \mathcal{P}(E_j)} = \prod_{j=2}^{n} \mathcal{P}(E_j) \cdot \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{P}(E_1^m)}_{\mathcal{P}(\Omega)=1}$$

(b) Ähnlich zu (a), genügt es auch hier zu zeigen: Für $E_j \in \mathcal{E}_j,\ 2 \leq j \leq n$ gilt

$$\mathcal{P}\left(E_2 \cap \cdots \cap E_n\right) = \mathcal{P}(E_2) \cdot .. \cdot \mathcal{P}(E_n)$$

Tatsächlich, gilt

$$\underbrace{\mathcal{P}\left(E_2 \cap \cdots \cap E_n\right)}_{\mathcal{P}(\Omega\cap E_2\cap\cdots\cap E_n)} \overset{\substack{\text{Stetigkeit} \\ \text{von unten}}}{=} \lim_{k\to\infty} \mathcal{P}\big(\underbrace{E_k^{(1)} \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n}_{\nearrow_{k\to\infty}\ \Omega\cap E_2\cap..\cap E_n}\big) = \prod_{j=2}^{n} \mathcal{P}(E_j) \cdot \underbrace{\lim_{k\to\infty} \mathcal{P}(E_k^{(1)})}_{\mathcal{P}(\Omega)=1}$$

□

Aufgabe 02

(a) Bekanntlich folgt aus der Unabhängigkeit von A, B auch die Unabhängigkeit von A^c, B, betrachten also o.B.d.A. nur den Fall $\mathcal{P}(A) = 0$. Dann ist

$$\mathcal{P}(A \cap B) \leq \mathcal{P}(A) = 0 \ \Rightarrow\ \mathcal{P}(A \cap B) = 0 = \mathcal{P}(A) \cdot \mathcal{P}(B)$$

also A, B unabhängig.

(b) A, B sind unabhängig genau dann wenn

$$\underbrace{\mathcal{P}(A \cap B)}_{\mathcal{P}(A)} = \mathcal{P}(A) \cdot \mathcal{P}(B)$$

was genau dann der Fall ist wenn $\mathcal{P}(A) = 0$ oder $\mathcal{P}(B) = 1$.

Aufgabe 03

Für Mengenfamilie $\mathcal{F} \subseteq \mathscr{P}(S)$ bezeichne

$$X^{-1}(\mathcal{F}) := \left\{X^{-1}(A) : A \in \mathcal{F}\right\}$$

(a) Wegen $\Omega = X^{-1}(S) \in \sigma(X)$, $\left[X^{-1}(A)\right] = X^{-1}\left(A^c\right) \in \sigma(X),\ A \in \mathfrak{S}$ und

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X^{-1}(A_n) = X^{-1}\left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right] \in \sigma(X) \quad , \quad A_n \in \mathfrak{S},\ n \in \mathbb{N}$$

ist $\sigma(X)$ tatsächlich eine σ-Algebra auf Ω.

(b) Offensichtlich ist $X^{-1}(\mathfrak{S}) \subseteq \sigma(X)$, sprich X ist messbar bzgl. $\sigma(X)$. Ist anderseits X messbar bzgl. der σ-Algebra $\mathcal{A}'$, so ist $\underbrace{X^{-1}(\mathfrak{S})}_{=\sigma(X)} \subseteq \mathcal{A}'$, das heißt $\sigma(X)$ ist tatsächlich die kleinste σ-Algebra bzgl. der X messbar ist.

(c) Jede Menge $A \in \mathfrak{S}$ kann dargestellt werden als $A = \{y_{i_1}, .., y_{i_k}\} \cup \widetilde{A},\ k \le n,\ 1 \le i_1, .., i_k \le n$ mit $\widetilde{A} \cap X(\Omega) = \emptyset$. Daher ist

$$\begin{aligned}
\sigma(X) &= \left\{X^{-1}\left(A\right) \ : \ A = \{y_{i_1}, .., y_{i_k}\} \cup \widetilde{A} \in \mathfrak{S},\ 1 \le i_1, .., i_k \le n,\ k \le n,\ \widetilde{A} \cap X(\Omega) = \emptyset\right\} \\
&= \left\{X^{-1}(\{y_{i_1}, .., y_{i_k}\}) \cup \underbrace{X^{-1}(\widetilde{A})}_{\emptyset} \ : \ \{y_{i_1}, .., y_{i_k}\} \cup \widetilde{A} \in \mathfrak{S},\ 1 \le i_1, .., i_k \le n,\ k \le n,\ \widetilde{A} \cap X(\Omega) = \emptyset\right\} \\
&= \left\{\bigcup_{j=1}^{k} X^{-1}\left(\{y_{i_j}\}\right) \ \middle|\ \exists\ A \in \mathfrak{S} : \{y_{i_1}, .., y_{i_k}\} \subseteq A\right\}
\end{aligned}$$

Im Falle dass $\{y_1\}, .., \{y_n\} \in \mathfrak{S}$, vereinfacht sich $\sigma(X)$ zu

$$\sigma(X) = \left\{\bigcup_{j=1}^{k} X^{-1}(\{y_{i_j}\}) : 1 \le i_1, .., i_k \le n\right\} = \sigma\left\{X^{-1}(\{y_i\}) : 1 \le i \le n\right\}$$

(d) Wegen

$$X^{-1}(E_1) \cap X^{-1}(E_2) = X^{-1}\big(\underbrace{E_1 \cap E_2}_{\in\mathcal{E}}\big) \in X^{-1}(\mathcal{E}) \quad , \quad E_1, E_2 \in \mathcal{E}$$

ist auch $X^{-1}(\mathcal{E})$ $\cap$-stabil. Zu zeigen bleibt nun, dass

$$X^{-1}(\overbrace{\sigma(\mathcal{E})}^{\mathfrak{S}}) = \sigma(X^{-1}(\mathcal{E}))$$

Wegen $\mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$ ist offensichtlich $X^{-1}(\mathcal{E}) \subseteq X^{-1}(\sigma(\mathcal{E}))$. Ist anderseits $\widetilde{\mathcal{A}} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra mit $X^{-1}(\mathcal{E}) \subseteq \widetilde{\mathcal{A}}$, so ist bekanntlich $X : (\Omega, \widetilde{\mathcal{A}}) \to (S, \sigma(\mathcal{E}))$ messbar (vgl. Maßtheorie), das heißt

$$X^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) \subseteq \widetilde{\mathcal{A}}$$

Daher ist $X^{-1}(\sigma(\mathcal{E}))$ die kleinste σ-Algebra die $X^{-1}(\mathcal{E})$ enthält.

(e) Seien $X_i : (\Omega, \mathcal{A}) \to (S_i, \mathfrak{S}_i)$. Definitionsgemäß ist

$$\mathop{\times}_{i=1}^{n} \mathfrak{S}_i := \{A_1 \times \cdots \times A_n : A_i \in \mathfrak{S}_i\}$$

ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{S}$. Ferner ist

$$X^{-1}(\overbrace{A_1 \times \cdots \times A_n}^{\in \mathop{\times}_{i=1}^{n} \mathfrak{S}_i}) = \bigcap_{i=1}^{n} \underbrace{X_i^{-1}(A_i)}_{\in\mathcal{A}} \in \mathcal{A} \qquad \forall\ A_i \in \mathfrak{S}_i$$

das heißt $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (S, \mathfrak{S})$ ist messbar.

Wegen

$$X_i^{-1}(A_i) = X^{-1}\underbrace{(S_1 \times .. \times \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{A_i} \times .. \times S_n)}_{\in \mathfrak{S}} \in X^{-1}(\mathfrak{S}) := \sigma(X) \quad \forall\ A_i \in \mathfrak{S}_i,\ 1 \leq i \leq n$$

sind alle $X_i : (\Omega, \sigma(X)) \to (S, \mathfrak{S})$ messbar.

Zu zeigen bleibt nun: Sind alle X_i bzgl. irgendeiner σ-Algebra $\widetilde{\mathcal{A}} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$ messbar, so muss $\sigma(X) \subseteq \widetilde{\mathcal{A}}$ gelten. Tatsächlich, ist in diesem Fall

$$X^{-1}(\overbrace{A_1 \times \cdots \times A_n}^{\in \bigtimes_{i=1}^{n} \mathfrak{S}_i}) = \bigcap_{i=1}^{n} \underbrace{X_i^{-1}(A_i)}_{\in \widetilde{\mathcal{A}}} \in \widetilde{\mathcal{A}} \quad \forall\ A_i \in \mathfrak{S}_i$$

bzw.

$$\widetilde{\mathcal{A}} \supseteq X^{-1}\left(\bigtimes_{i=1}^{n} \mathfrak{S}_i\right)$$

also

$$\widetilde{\mathcal{A}} \supseteq \sigma\left[X^{-1}\left(\bigtimes_{i=1}^{n} \mathfrak{S}_i\right)\right] \overset{(d)}{=} X^{-1}\Bigg[\underbrace{\sigma\left(\bigtimes_{i=1}^{n} \mathfrak{S}_i\right)}_{\mathfrak{S}}\Bigg] = \sigma(X)$$

(f) Nach Konstruktion ist

$$\sigma(Y) \overset{\text{def}}{=} (f \circ X)^{-1}(\mathfrak{S}') = X^{-1}\big[\underbrace{f^{-1}(\mathfrak{S}')}_{\substack{\subseteq \mathfrak{S} \\ \text{da } f \\ \text{messbar}}}\big] \subseteq X^{-1}(\mathfrak{S}) = \sigma(X)$$

(g) Sei $\Omega := \{1, .., 6\}^2$. Da jedes $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ dargestellt werden kann als $A = A_1 \cap A_2,\ A_1 \subseteq X(\Omega), A_2 \subseteq X(\Omega)^c$ und daher $X^{-1}(A) = X^{-1}(A_1)$ ist, gilt stets

$$\sigma(X) \subseteq X^{-1}\left[\mathscr{P}(X(\Omega))\right]$$

Anderseits ist wegen $\mathscr{P}(\underbrace{X(\Omega)}_{\subseteq \mathbb{N}}) \subseteq \mathscr{B}(\mathbb{R})$ auch

$$X^{-1}\left[\mathscr{P}(X(\Omega))\right] \subseteq X^{-1}(\mathscr{B}(\mathbb{R})) =: \sigma(X)$$

sprich

$$\sigma(X) = X^{-1}\left[\mathscr{P}(X(\Omega))\right] = X^{-1}\big(\underbrace{\mathscr{P}\{2, ..., 12\}}_{\sigma\{\{2\}, ..., \{12\}\}}\big) \overset{(d)}{=} \sigma\left[X^{-1}\{\{2\}, \ldots, \{12\}\}\right]$$

Es ergibt sich dementsprechend

$$\begin{aligned}
\sigma(X) = \sigma\big\{ & \{(1,1)\}, \\
& \{(1,2), (2,1)\}, \\
& \{(1,3), (2,2), (3,1)\}, \\
& \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}, \\
& \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}, \\
& \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}, \\
& \{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\}, \\
& \{(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)\}, \\
& \{(4,6), (5,5), (6,4)\}, \\
& \{(5,6), (6,5)\}, \\
& \{(6,6)\} \big\}
\end{aligned}$$