Stochastik II (Wahrscheinlichkeitstheorie) 2009/10

3. Serie

1. Gegeben seien n Mengensysteme $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n \subseteq \mathcal{A}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Es gelte
$$\mathbb{P}(E_1 \cap \cdots \cap E_n) = \mathbb{P}(E_1) \cdots \mathbb{P}(E_n)$$
für alle $E_j \in \mathcal{E}_j$, $1 \leq j \leq n$. Zeigen Sie, dass dann $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n$ unabhängig sind, wenn eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

   (a) Für jedes $j \leq n$ ist Ω disjunkte Vereinigung höchstens abzählbar unendlich vieler Mengen aus $\mathcal{E}_j$.

   (b) Für jedes $j \leq n$ existieren Mengen $E_k^{(j)} \in \mathcal{E}_j$, $k = 1, 2, \ldots$, mit $E_k^{(j)} \nearrow \Omega$ für $k \to \infty$.

2. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

   (a) Zeigen Sie, dass ein $A \in \mathcal{A}$ mit $\mathbb{P}(A) = 0$ oder $\mathbb{P}(A) = 1$ und eine beliebige Teilmenge $B \in \mathcal{A}$ stets unabhängig sind.

   (b) Für $A, B \in \mathcal{A}$ gelte $A \subseteq B$. Wann sind A und B unabhängig ? Wann ist eine Menge A von sich selber unabhängig ?

3. Es sei X eine auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ definierte Zufallsvariable mit Werten in einem messbaren Raum $(S, \mathfrak{S})$. Man definiert dann
$$\sigma(X) := \{X^{-1}(B) : B \in \mathfrak{S}\} \ .$$

   (a) Zeigen Sie, dass $\sigma(X)$ eine Teil–σ–Algebra von $\mathcal{A}$ ist.

   (b) Man beweise, $\sigma(X)$ ist die kleinste σ–Algebra auf Ω, für die X messbar ist.

   (c) Eine Zufallsvariable X mit Werten in S nehme nur die (unterschiedlichen) Werte $y_1, \ldots, y_n$ aus S an. Beschreiben Sie die allgemeine Gestalt von Mengen in $\sigma(X)$.

   (d) Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{S}$ ein ($\cap$–stabiles) Erzeugendensystem von $\mathfrak{S}$. Zeigen Sie, dass dann auch
$$\{X^{-1}(E) : E \in \mathcal{E}\}$$
   ein ($\cap$–stabiles) Erzeugendensystem von $\sigma(X)$ ist.

   (e) Gegeben seien Zufallsvariable $X_1, \ldots, X_n$ mit Werten in messbaren Räumen $(S_1, \mathfrak{S}_1), \ldots, (S_n, \mathfrak{S}_n)$. Wie üblich versieht man $S := S_1 \times \cdots S_n$ mit der Produkt–σ–Algebra $\mathfrak{S} := \mathfrak{S}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{S}_n$. Die Abbildung $X : \Omega \mapsto S$ werde durch
$$X(\omega) := (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)) \,, \quad \omega \in \Omega,$$
   definiert. Zeigen Sie, dass X eine S–wertige Zufallsvariable (bzgl. $\mathfrak{S}$) ist. Außerdem begründe man, warum $\sigma(X)$ die kleinste σ–Algebra darstellt, bezüglich der alle X_j, $1 \leq j \leq n$, messbar sind.

   (f) Sei $f : S \to S'$ messbar, wobei $(S', \mathfrak{S}')$ ein weiterer messbarer Raum sei. Mit dieser Funktion f definiere man die S'–wertige Zufallsvariable $Y := f(X)$. In welcher Relation stehen $\sigma(X)$ und $\sigma(Y)$?

   (g) Für $X : \{1, \ldots, 6\}^2 \to \mathbb{R}$ mit $X(\omega_1, \omega_2) := \omega_1 + \omega_2$ bestimme man $\sigma(X)$.

Abgabe: 10. 11. 09