Wahrscheinlichkeitstheorie
FSU Jena - WS 09/10
Serie 02 - Lösungen

Stilianos Louca

November 3, 2009

Aufgabe 01

(a) Bekanntlich ist

$$\mathbb{E}\,|X| = \int_0^\infty \underbrace{\mathcal{P}(|X| \geq t)}_{=:G(t)}\; dt$$

Da die (messbare) Funktion $G : [0,\infty) \to [0,1]$ monoton fallend ist, gilt

$$G(\lceil t \rceil) \leq G(t) \leq G(\lfloor t \rfloor) \quad , \quad t \geq 0$$

so dass man abschätzen kann

$$\sum_{n=1}^\infty \underbrace{\int_{n-1}^n G(n)\; dt}_{\mathcal{P}(|X|\geq n)} = \int_0^\infty G(\lceil t \rceil)\; dt \leq \underbrace{\int_0^\infty G(t)\; dt}_{\mathbb{E}|X|} \leq \int_0^\infty G(\lfloor t \rfloor)\; dt = \underbrace{\int_0^1 G(0)\; dt}_{1} + \sum_{n=1}^\infty \underbrace{\int_n^{n+1} G(n)\; dt}_{\mathcal{P}(|X|\geq n)}$$

(b) Nimmt X Werte in $\mathbb{N}$ an, das heißt $\mathcal{P}(|X| \geq t) = \mathcal{P}(|X| \geq \lceil t \rceil)$, so folgt

$$\mathbb{E}\,|X| = \int_{(0,\infty)} \mathcal{P}(|X| \geq t)\; dt = \int_{(0,\infty)} \mathcal{P}(|X| \geq \lceil t \rceil)\; dt = \sum_{n=1}^\infty \underbrace{\int_{(n-1,n]} \mathcal{P}(|X| \geq n)\; dt}_{\mathcal{P}(|X|\geq n)}$$

(c) Zeigen zunächst: Gilt (1) für irgendein c_0, so gilt sie sogar für alle $c > 0$.

Tatsächlich, im Falle $c < c_0$ ist

$$\sum_{n=1}^\infty \mathcal{P}(|X| \geq c \cdot n) = \sum_{n=0}^\infty \underbrace{\mathcal{P}\Big(|X| \geq c_0 \cdot \frac{cn}{c_0}\Big)}_{\leq \mathcal{P}\left(|X| \geq c_0 \cdot \left\lfloor \frac{cn}{c_0} \right\rfloor\right)} \overset{(*)}{\leq} \left\lceil \frac{c_0}{c} \right\rceil \underbrace{\sum_{n=0}^\infty \mathcal{P}\left(|X| \geq c_0 n\right)}_{<\infty}$$

$$(*) \quad : \quad \#\left\{ m \in \mathbb{N} : \left\lfloor \frac{c(n+m)}{c_0} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{cn}{c_0} \right\rfloor \right\} \leq \#\left\{ m \in \mathbb{N} : \frac{cm}{c_0} \leq 1 \right\} \leq \left\lceil \frac{c_0}{c} \right\rceil$$

und im Falle $c > c_0$ sowieso

$$\sum_{n=1}^\infty \underbrace{\mathcal{P}(|X| \geq c \cdot n)}_{\leq \mathcal{P}(|X| \geq c_0 \cdot n)} < \infty$$

Alternativer Beweis:

$$\infty > \frac{c_0}{c}\Big[\sum_{n=1}^\infty \underbrace{\mathcal{P}\left(|X| \geq c_0 n\right)}_{\mathcal{P}\left(\frac{|X|}{c_0} \geq n\right)} + 1\Big] \overset{(a)}{\geq} \frac{c_0}{c} \frac{\mathbb{E}\,|X|}{c_0} = \frac{\mathbb{E}\,|X|}{c} \overset{(a)}{\geq} \sum_{n=1}^\infty \mathcal{P}\left(\frac{|X|}{c} \geq n\right) = \sum_{n=1}^\infty \mathcal{P}\left(|X| \geq nc\right)$$

Zeigen nun: Gilt (1) für ein $c > 0$, so muss $\mathbb{E}|X| < \infty$. Tatsächlich gilt dann (1) insbesondere für $c = 1$, die Aussage folgt also aus (b).

Zu zeigen bleibt: Gilt $\mathbb{E}|X| < \infty$, so gilt (1) für irgendein $c > 0$. Doch dies folgt ebenfalls aus (b) (setze $c := 1$).

(d) **Fall $p \geq 1$:** Analog zu vorhin gilt

$$p \cdot 0^{p-1} + \frac{p}{2^{p-1}} \sum_{n=2}^{\infty} \mathcal{P}(|X| \geq n) \cdot n^{p-1} \leq p \cdot 0^{p-1} + p \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \mathcal{P}(|X| \geq n) \cdot \underbrace{(n-1)}_{\geq n/2}{}^{p-1}$$

$$= p \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}(|X| \geq n) \cdot (n-1)^{p-1} = p \cdot \int_0^{\infty} \mathcal{P}\left(|X| \geq \lceil s \rceil\right) \cdot \lceil s-1 \rceil^{p-1} \; ds$$

$$\leq \overbrace{\int_0^{\infty} \mathcal{P}(|X| \geq s) \cdot ps^{p-1} \; ds}^{\mathbb{E}|X|^p}$$

$$\leq p \cdot \int_0^{\infty} \mathcal{P}\left(|X| \geq \lfloor s \rfloor\right) \cdot \lfloor s+1 \rfloor^{p-1} \; ds = p \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}(|X| \geq n) \cdot (n+1)^{p-1} = p + \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}(|X| \geq n) \cdot \underbrace{(n+1)}_{\leq 2n}{}^{p-1}$$

$$\leq p + 2^{p-1} p \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}(|X| \geq n) \cdot n^{p-1}$$

Fall $0 < p < 1$:

$$p \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}(|X| \geq n) \cdot n^{p-1} = p \cdot \int_0^{\infty} \mathcal{P}\left(|X| \geq \lceil s \rceil\right) \cdot \lceil s \rceil^{p-1} \; ds$$

$$\leq \overbrace{\int_0^{\infty} \mathcal{P}(|X| \geq s) \cdot ps^{p-1} \; ds}^{\mathbb{E}|X|^p}$$

$$\leq \underbrace{p \int_0^{1} s^{p-1} \; ds}_{\substack{<\infty \\ \text{da } p>0}} + p \cdot \int_1^{\infty} \mathcal{P}\left(|X| \geq \lfloor s \rfloor\right) \cdot \lfloor s \rfloor^{p-1} \; ds = \text{const} + p \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}(|X| \geq n) \cdot n^{p-1}$$

□

Aufgabe 02

Existenz des bedingten Erwartungswertes

Sei zunächst $X \geq 0$, dazu das Maß

$$\mu : \mathcal{C} \to [0,1] \quad , \quad \mu(C) := \int_{(C,\mathcal{A})} X \; d\mathcal{P} \quad , \quad C \in \mathcal{C}$$

(vgl. Maßtheorie). Offensichtlich ist $\mu \ll \mathcal{P}$ da Integrale über Nullmengen verschwinden. Nach Radon-Nycodym existiert daher eine eindeutig bestimmte ($\mathcal{C}$-messbare) Dichte $Y : (\Omega, \mathcal{C}) \to [0, \infty)$ mit

$$\mu(C) = \int\limits_{(C,\mathcal{C})} Y \; d\mathcal{P}\big|_{\mathcal{C}} = \int\limits_{(C,\mathcal{C})} Y \; d\mathcal{P}$$

Für allgemeines X, $\mathbb{E}|X| < \infty$, seien $Y^{(+)}, Y^{(-)}$ jeweils die bedingten Erwartungswerte von X^+, X^- bzgl. $\mathcal{C}$. Beachte dass wegen $\mathbb{E}|X| < \infty$ die Teilfunktionen X^+, X^- fast-sicher $< \infty$ sind. Dann ist auch

$$Y := \begin{cases} (Y^{(+)} - Y^{(-)}) & : \left|Y^{(+)}\right| < \infty \;\vee\; \left|Y^{(-)}\right| < \infty \\ & \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

$\mathcal{C}$-messbar, $Y^{\pm} = Y^{(\pm)}$ (mod 0) und es gilt

$$\int\limits_C X \; d\mathcal{P} = \int\limits_C X^+ \; d\mathcal{P} - \int\limits_C X^- \; d\mathcal{P} = \int\limits_C \underbrace{Y^+}_{\substack{Y^{(+)} \\ \mathcal{P}-\text{f.s}}} \; d\mathcal{P} - \int\limits_C \underbrace{Y^-}_{\substack{Y^{(-)} \\ \mathcal{P}-\text{f.s}}} \; d\mathcal{P} = \int\limits_C Y \; d\mathcal{P} \quad , \quad C \in \mathcal{C}$$

Ferner ist Y $\mathcal{P}$-fast sicher eindeutig bestimmt, denn:

Gäbe es eine weitere Dichte $\widetilde{Y} : (\Omega, \mathcal{C}) \to \mathbb{R}$ mit $\int\limits_C X \; d\mathcal{P} = \int\limits_C \widetilde{Y} \; d\mathcal{P} \quad \forall \; C \in \mathcal{C}$, das heißt

$$\int\limits_C (\widetilde{Y}^+ + Y^+) \; d\mathcal{P} = \int\limits_C (\widetilde{Y}^- + Y^-) \; d\mathcal{P} \qquad \forall \; C \in \mathcal{C}$$

so müsse nach Radon-Nycodyn $(\widetilde{Y}^+ + Y^+) = (\widetilde{Y}^- + Y^-)$ bzw. $\widetilde{Y} = Y$ $\mathcal{P}$-fast sicher.

Eigenschaften

(a) Seien Y_1, Y_2 jeweils die bedingten Erwartungswerte von X_1, X_2 bzgl. $\mathcal{C}$. Dann ist $\alpha Y_1 + \beta Y_2$ ebenfalls $\mathcal{C}$-messbar und der bedingte Erwartungswert von $\alpha X_1 + \beta X_2$ bzgl. $\mathcal{C}$, denn

$$\int\limits_C (\alpha X_1 + \beta X_2) \; d\mathcal{P} = \alpha \underbrace{\int\limits_C X_1 \; d\mathcal{P}}_{\int\limits_C Y_1 \; d\mathcal{P}} + \beta \underbrace{\int\limits_C X_2 \; d\mathcal{P}}_{\int\limits_C Y_2 \; d\mathcal{P}} = \int\limits_C (\alpha Y_1 + \beta Y_2) \; d\mathcal{P}$$

(b)

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{C})) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{(\Omega,\mathcal{C})} \underbrace{\mathbb{E}(X \mid \mathcal{C})}_{Y} \; d\mathcal{P} \overset{\Omega \in \mathcal{C}}{=} \int\limits_{(\Omega,\mathcal{A})} X \; d\mathcal{P} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{E}X$$

Spezialfall

Im Fall $\mathcal{C} = \sigma\{A_1, .., A_n\}$ mit $(A_j) \subseteq \mathcal{A}$ disjunkte Zerlegung von Ω, $\mathcal{P}(A_j) > 0$, setze

$$Y := \sum_{j=1}^n \frac{1_{A_j}}{\mathcal{P}(A_j)} \int\limits_{(A_j,\mathcal{A})} X \; d\mathcal{P}$$

Tatsächlich ist dann $Y = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{C})$, denn zum einen ist Y offensichtlich $\mathcal{C}$-messbar, zum anderen ist für $C = \bigcup\limits_{j \in J} A_j$ [1]

$$\int\limits_C X \; d\mathcal{P} = \sum_{j \in J} \int\limits_{(A_j,\mathcal{A})} X \; d\mathcal{P} = \sum_{j \in J} \overbrace{\int\limits_{(A_j,\mathcal{C})} \frac{1_{A_j}}{\mathcal{P}(A_j)} \; d\mathcal{P}}^{1} \cdot \int\limits_{(A_j,\mathcal{A})} X \; d\mathcal{P} = \int\limits_{(C,\mathcal{C})} Y \; d\mathcal{P}$$

[1] Beachte dass

$$\sigma\{A_1, .., A_j\} = \left\{ \biguplus_{j \in J} A_j : J \subseteq \{1, .., n\} \right\}$$