Stochastik II (Wahrscheinlichkeitstheorie) 2009/10

2. Serie

1. Beweisen Sie für eine (reellwertige) zufällige Größe X folgende Aussagen:

   (a) Es gelten die Ungleichungen

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\,|X| \geq n) \leq \mathbb{E}\,|X| \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\,|X| \geq n)\,.$$

   (b) Nimmt X Werte in $\mathbb{N}$ an, so besteht sogar die Identität

   $$\mathbb{E}\,X = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\,X \geq n)\,.$$

   (c) Es gilt genau dann $\mathbb{E}\,|X| < \infty$, wenn für ein $c > 0$ die Aussage

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\,|X| \geq c \cdot n) < \infty \tag{1}$$

   richtig ist. In diesem Fall gilt dann (1) sogar für alle $c > 0$.

   (d) Für ein $p > 0$ gilt dann und nur dann $\mathbb{E}\,|X|^p < \infty$, wenn man

   $$\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-1}\mathbb{P}(\,|X| \geq n) < \infty$$

   hat.

2. Gegeben seien ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und eine Teil–σ–Algebra $\mathcal{C}$ von $\mathcal{A}$. Beweisen Sie folgende Aussage: Zu jeder zufälligen Größe X mit $\mathbb{E}|X| < \infty$ existiert eine $\mathbb{P}$–f.s. eindeutig bestimmte $\mathcal{C}$–messbare zufällige Größe Y mit

   $$\int_C X(\omega)\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \int_C Y(\omega)\,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)$$

   für alle $C \in \mathcal{C}$.
   Hinweis: Man nehme zuerst $X \geq 0$ an, konstruiere mit X ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{C})$ und verwende den Satz von Radon–Nikodym.

   Man nennt Y den bedingten Erwartungswert von X bzgl. $\mathcal{C}$ und schreibt

   $$\mathbb{E}(X|\,\mathcal{C}) := Y\,.$$

   Beweisen Sie folgende Eigenschaften des bedingten Erwartungswertes:

   (a) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und integrierbare zufällige Größen X_1, X_2 gilt

   $$\mathbb{E}(\alpha X_1 + \beta X_2|\,\mathcal{C}) = \alpha\,\mathbb{E}(X_1|\,\mathcal{C}) + \beta\,\mathbb{E}(X_2|\,\mathcal{C}) \quad \mathbb{P} - \text{f.s.}$$

   (b) Man hat

   $$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\,\mathcal{C})) = \mathbb{E}X\,.$$

   Bestimmen Sie $\mathbb{E}(X|\,\mathcal{C})$ im Fall $\mathcal{C} = \sigma\{A_1, \ldots, A_n\}$ mit $A_j \in \mathcal{A}$ disjunkt, $\bigcup_{j=1}^n A_j = \Omega$ und $\mathbb{P}(A_j) > 0$.

Abgabe: 03. 11. 09