Wahrscheinlichkeitstheorie
FSU Jena - WS 09/10
Serie 01 - Lösungen

Stilianos Louca

November 3, 2009

Aufgabe 01

Richtung "⇒": Beweis durch Widerspruch

Sei $\mathcal{P} \ll \mathcal{Q}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig, dazu Folge $\delta_n \searrow 0$ so dass

$$\alpha_n := \sum_{k=n}^{\infty} \delta_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(z.B. $\delta_n := 2^{-n}$). Angenommen es gäbe zu jedem $\delta_n > 0$ ein $A_n \in \mathcal{A}$ mit $\mathcal{Q}(A_n) < \delta_n$ und $\mathcal{P}(A_n) \geq \varepsilon$. Für die monoton fallende Folge

$$B_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} A_n$$

gelte dann

$$\mathcal{Q}(B_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \underbrace{\mathcal{Q}(A_n)}_{<\delta_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

das heißt

$$\mathcal{Q}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\Big) = 0$$

Doch anderseits wäre

$$\mathcal{P}(B_n) \geq \mathcal{P}(A_n) \geq \varepsilon \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

ein Widerspruch zu

$$\mathcal{P}(B_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{P}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\Big) \overset{\mathcal{P}\ll\mathcal{Q}}{=} 0$$

Richtung "⇐"

Sei $A \in \mathcal{A}$ so dass $\mathcal{Q}(A) = 0$, und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein $\delta > 0$ so dass

$$\forall\, B \in \mathcal{A} : \mathcal{Q}(B) < \delta \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}(B) < \varepsilon$$

insbesondere $\mathcal{P}(A) < \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $\mathcal{P}(A) = 0$.
$\square$

Hilfslemma 01

Seien $(\alpha_j^N) \subseteq \mathbb{R}$ so dass

$$0 \leq \alpha_j^N \leq \alpha_j^{N+1} \quad \forall\, j, N \in \mathbb{N}$$

und

$$\alpha_j := \lim_{N\to\infty} \alpha_j^N$$

Dann gilt

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j^N = \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j$$

Beweis: Siehe Übungsserie 10 zur Vorlesung *Maß und Integral*, FSU Jena, SS 2008.

Aufgabe 02

Wahrscheinlichkeitsmaß

Klar ist $\mathcal{P}:\mathcal{A}\to[0,1]$ und $\mathcal{P}(\emptyset)=0$. Zu zeigen bleibt die σ-Additivität. Seien $A_n\in\mathcal{A}$ disjunkt, dann

$$\mathcal{P}\Big(\biguplus_n A_n\Big) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_j\mathcal{P}_j(A_n) = \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty}\lim_{N\to\infty}\underbrace{\sum_{n=1}^{N}\lambda_j\mathcal{P}_j(A_n)}_{\alpha_j^N}}_{\alpha_j}$$

$$\overset{\text{Hilfslemma 01}}{=} \lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{N}\lambda_j\mathcal{P}_j(A_n) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j\mathcal{P}_j(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{P}(A_n)$$

□

Bemerkung: Gezeigt wurde dass die Menge $\mathfrak{M}_1$ aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega,\mathcal{A})$ konvex ist.

Integrabilität von nicht-negativen Funktionen

Sei zunächst $f:\Omega\to[0,\infty]$ messbar und integrabel bzgl. $\mathcal{P}_j\ \forall\ j$, von unten approximiert durch die Treppenfunktionen

$$f_n := \sum_{k=1}^{K_n} f_n^k\cdot 1_{A_n^k}\quad,\quad n\in\mathbb{N}$$

mit $A_n^1,..,A_n^{K_n}$ disjunkt (für jedes $n\in\mathbb{N}$) und $f_n^k\in[0,\infty]$. Dann

$$\int_\Omega f\ d\mathcal{P} \overset{\text{def.}}{=} \lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n\ d\mathcal{P} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{K_n} f_n^k\mathcal{P}(A_n^k) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{K_n} f_n^k\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j\mathcal{P}_j(A_n^k)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\underbrace{\sum_{k=1}^{K_n} f_n^k\lambda_j\mathcal{P}_j(A_n^k)}_{\substack{\lambda_j\int_\Omega f_n d\mathcal{P}_j\in[0,\infty) \\ \text{monoton wachsend} \\ \text{in } n}} \overset{\text{Hilfslemma 01}}{=} \sum_{j=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\lambda_j\int_\Omega f_n\ d\mathcal{P}_j = \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j\int_\Omega f\ d\mathcal{P}_j$$

das heißt f ist integrabel bzgl. $\mathcal{P}$ genau dann wenn

$$\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j\int_\Omega f\ d\mathcal{P}_j < \infty$$

Integrabilität messbarer Funktionen

$f:\Omega\to\mathbb{R}$ ist genau dann integrabel wenn $|f|$ integrabel ist (siehe oben).

Aufgabe 03

(a) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ ein atomloser Wahrscheinlichkeitsraum, $A_0 \in \mathcal{A}$ mit $\mathcal{P}(A_0) > 0$. Nach Voraussetzung existiert eine Teilmenge $\mathcal{A} \ni B \subseteq A_0$ mit $0 < \mathcal{P}(B) < \mathcal{P}(A_0)$, insbesondere existiert $\mathcal{A} \ni A_1 \subseteq A_0$ mit $0 < \mathcal{P}(A_1) \leq \mathcal{P}(A_0)/2$ (wähle $A_1 := B$ oder $A_1 := A_0 \setminus B$). Nach Induktion folgt dass für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ eine Teilmenge $\mathcal{A} \ni A_n \subseteq A_0$ existiert mit $\mathcal{P}(A_n) \leq 2^{-n} A_0$, das heißt A_0 besitzt Teilmengen mit beliebig kleinem Maß!

Sei nun $\alpha \in [0,1]$, dazu

$$\Lambda_\alpha := \left\{ A \in \mathcal{A} : \mathcal{P}(A) \leq \alpha \right\}$$

ausgestattet mit der Halbordnung

$$A \lesssim B \;:\Leftrightarrow\; (A = B) \quad \vee \quad (A \subsetneq B \quad \wedge \quad \mathcal{P}(A) < \mathcal{P}(B)) \quad , \quad A, B \in \Lambda_\alpha$$

Sei nun $T \subseteq \Lambda_\alpha$ eine vollständig geordnete Untermenge von Λ_α, dazu

$$\alpha_T := \sup_{B \in T} \mathcal{P}(B)$$

Man kann nun zwischen folgenden Fällen unterscheiden:

(i) **Fall:** $\exists\ A \in T$ mit $\mathcal{P}(A) = \alpha_T$.
Dann ist A eine obere Schranke von T, denn wegen

$$\mathcal{P}(B) \leq \mathcal{P}(A) \;\; \forall\ B \in T$$

(Def. von α_T) gilt

$$A \not\lesssim B \;\; \forall\ T \ni B \neq A$$

(Def. von $\lesssim$ und der Totalordnung), also $B \lesssim A \;\; \forall\ B \in T$.

(ii) **Fall:** $\forall\ B \in T : \mathcal{P}(B) < \alpha_T$.
Wähle Folge $A_1 \subseteq A_2 \subseteq .. \in T$ so dass $\mathcal{P}(A_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha_T$ [1]. Dann ist $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Lambda_\alpha$ denn $\mathcal{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{P}(A_n)$. Ferner ist A eine obere Schranke von T, denn:

Für jedes $B \in T$ (Erinnerung: $\mathcal{P}(B) < \alpha_T$) existiert ein A_n mit $\mathcal{P}(B) < \mathcal{P}(A_n)$, daher auch $B \subsetneq A_n$, insbesondere also

$$B \subsetneq A \quad \wedge \quad \mathcal{P}(B) < \mathcal{P}(A) \;\; \forall\ B \in T$$

sprich $B \lesssim A \;\; \forall\ B \in T$.

Jede total-geordnete Untermenge $T \subseteq \Lambda_\alpha$ besitzt also eine obere Schranke. Nach Zorns Lemma besitzt dann Λ_α ein maximales Element $A_\alpha \in \Lambda_\alpha$. Für dieses gilt dann schließlich $\mathcal{P}(A_\alpha) = \alpha$, denn:

Wäre $\mathcal{P}(A_\alpha) < \alpha$, so gäbe es nach dem ersten Teil eine genügend kleine Menge $A_\varepsilon \subset {A_\alpha}^c$ mit $0 < \mathcal{P}(A_\varepsilon) < (\alpha - \mathcal{P}(A_\alpha))$, sprich $A_\alpha \uplus A_\varepsilon \in \Lambda_\alpha$ und $A_\alpha \lesssim A_\alpha \uplus A_\varepsilon$, ein Widerspruch zur Maximalität von A_α in Λ_α.

(b) **Richtung "$\Rightarrow$"** ist klar, denn für $\mathcal{P}(\{x\}) =: \varepsilon > 0$ müsse es eine Teilmenge $A \subsetneq \{x\}$ geben mit $0 < \mathcal{P}(A)$, etwas unmögliches!
Richtung "$\Leftarrow$": Sei $\mathcal{P}$ <u>nicht</u> atomlos, das heißt es existiere ein Atom $A \in \mathscr{B}$, $\mathcal{P}(A) > 0$, dazu $x \in A$. Betrachten die nicht-fallende Funktion

$$f(\varepsilon) := \mathcal{P}\left(A \cap B^o_\varepsilon(x)\right) \quad , \quad \varepsilon \geq 0$$

Nach Voraussetzung an A ist $f([0,\infty)) \in \{0, \mathcal{P}(A)\}$, das heißt f besitzt genau eine Sprungstelle bei irgendeinem $\varepsilon_0 \in [0,1]$. Insbesondere

$$\lim_{\varepsilon \nearrow \varepsilon_0} f(\varepsilon) < \lim_{\delta \searrow \varepsilon_0} f(\delta)$$

[1] Dies ist immer möglich, da es per Konstruktion von α_T stets eine Folge $A_1, A_2, .. \in T$ gibt, so dass $\mathcal{P}(A) \underset{n\to\infty}{\nearrow} \alpha_T$. Aufgrund der Totalordnung, muss dann $A_i \subseteq A_{i+1}$ sein.

sprich, für Folgen $\varepsilon_n \nearrow \varepsilon_0,\ \delta_m \searrow \varepsilon_0$ ist

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} \mathcal{P}(\overbrace{A \cap B^o_{\varepsilon_n}(x)}^{\substack{\text{monoton}\\ \text{wachsend in } n}})}_{\mathcal{P}\left(A\cap B^o_{\varepsilon_0}(x)\right)} < \underbrace{\lim_{m\to\infty} \mathcal{P}(\overbrace{A \cap B_{\delta_m}(x)}^{\substack{\text{monoton}\\ \text{fallend in } m}})}_{\mathcal{P}\left(A\cap B_{\varepsilon_0}(x)\right)}$$

das heißt

$$\underbrace{\mathcal{P}\left[(A \cap B_{\varepsilon_0}(x)) \setminus \left(A \cap B^o_{\varepsilon_0}(x)\right)\right]}_{\mathcal{P}[A\cap\{x\pm\varepsilon_0\}]} > 0$$

sprich $\mathcal{P}(\{x - \varepsilon_0\}) > 0$ oder $\mathcal{P}(\{x + \varepsilon_0\}) > 0$.

□

Aufgabe 04

Für beliebige $B \in \mathfrak{S}$ gilt

$$X^{-1}(B)\triangle Y^{-1}(B) = \overbrace{\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B,\ Y(\omega) \notin B\}}^{X^{-1}(B)\setminus Y^{-1}(B)} \cup \overbrace{\{\omega \in \Omega : X(\omega) \notin B, Y(\omega) \in B\}}^{Y^{-1}(B)\setminus X^{-1}(B)} \subseteq \underbrace{\{X \neq Y\}}_{\mathcal{P}-\text{Nullmenge}}$$

das heißt $X^{-1}(B) = Y^{-1}(B)$ mod 0. Insbesondere

$$\mathcal{P}_X(B) \overset{\text{def.}}{=} \mathcal{P}\left(X^{-1}(B)\right) = \mathcal{P}\left(Y^{-1}(B)\right) \overset{\text{def.}}{=} \mathcal{P}_Y(B)$$

□

Aufgabe 05

Seien $X : (\Omega_1, \mathfrak{S}_1, \mathcal{P}_1) \to (S, \mathcal{S})$ und $Y : (\Omega_2, \mathfrak{S}_2, \mathcal{P}_2) \to (S, \mathcal{S})$. Zu zeigen ist:

$$f(X) : (\Omega_1, \mathfrak{S}_1, \mathcal{P}_1) \to \mathbb{R},\ f(Y) : (\Omega_2, \mathfrak{S}_2, \mathcal{P}_2) \to \mathbb{R}$$

erzeugen identische Bildmaße. Doch dies ist tatsächlich der Fall, denn nach Voraussetzung sind die Bildmaße $\mathcal{P}_{1X},\ \mathcal{P}_{2Y}$ auf $(S, \mathcal{S})$ identisch, so dass für jede Borelmenge $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ gilt

$$\mathcal{P}_{1f(X)}(A) = \mathcal{P}_{1X}(f^{-1}(A)) = \mathcal{P}_{2Y}(f^{-1}(A)) = \mathcal{P}_{2f(Y)}(A)$$

□