Stochastik II (Wahrscheinlichkeitstheorie) 2009/10

1. Serie

1. Auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$ seien zwei Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ gegeben. Dann heißt bekanntlich $\mathbb{P}$ absolutstetig bzgl. $\mathbb{Q}$, wenn aus $\mathbb{Q}(A) = 0$ für $A \in \mathcal{A}$ stets $\mathbb{P}(A) = 0$ folgt (in Formeln $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$). Beweisen Sie folgende Aussage: Es gilt dann und nur dann $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass aus $\mathbb{Q}(A) < \delta$ für $A \in \mathcal{A}$ stets $\mathbb{P}(A) < \varepsilon$ folgt.

2. Gegeben seien Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \ldots$ auf $(\Omega, \mathcal{A})$ und nichtnegative Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ mit $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j = 1$. Zeigen Sie, dass dann auch durch
$$\mathbb{P}(A) := \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \, \mathbb{P}_j(A) \,, \quad A \in \mathcal{A} \,,$$
ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ definiert wird. Wann ist eine messbare Funktion f auf Ω bzgl. $\mathbb{P}$ integrabel und wie berechnet sich dann $\int_\Omega f(\omega) \, \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)$?

3. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Menge $A \in \mathcal{A}$ heißt Atom von $\mathbb{P}$, wenn $\mathbb{P}(A) > 0$ gilt und für jedes $B \in \mathcal{A}$ mit $B \subseteq A$ folgt entweder $\mathbb{P}(B) = 0$ oder $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)$. Besitzt ein Maßraum keine Atome, so nennt man ihn atomlos.

   (a) Zeigen Sie, dass in einem atomlosen Wahrscheinlichkeitsraum zu jedem $\alpha \in [0, 1]$ stets ein $A \in \mathcal{A}$ mit $\mathbb{P}(A) = \alpha$ existiert.
   Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass jede messbare Menge mit positivem Maß stets Teilmengen aus $\mathcal{A}$ mit beliebig kleinem Maß enthält. Danach betrachte man die Gesamtheit
   $$\Big\{ (A_j)_{j=1}^{\infty} : \; A_j \in \mathcal{A} \text{ disjunkt mit } \mathbb{P}(A_j) > 0 \;\text{ und }\; \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j) \le \alpha \Big\},$$
   konstruiere darauf eine geeignete Halbordnung und verwende das Zornsche Lemma für die Existenz eines maximalen Elements.

   (b) Beweisen Sie, dass ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $([0, 1], \mathcal{B})$, hierbei bezeichnet $\mathcal{B}$ die σ–Algebra der Borelmengen, genau dann atomlos ist, wenn $\mathbb{P}(\{x\}) = 0$ für alle $x \in [0, 1]$ gilt.
   Hinweis: Betrachten Sie für $B \in \mathcal{B}$ und $x \in B$ die Funktion
   $f(\varepsilon) := \mathbb{P}(B \cap \{y \in [0, 1]; \, |x - y| < \varepsilon\})$.

4. Gegeben seien zwei Zufallsvariable X und Y auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit Werten in einem messbaren Raum $(S, \mathcal{S})$. Gilt $X = Y$ $\mathbb{P}$–f.ü., d.h. es existiert eine Menge $N \in \mathcal{A}$ mit $\mathbb{P}(N) = 0$ und $X(\omega) = Y(\omega)$ für $\omega \notin N$, so besitzen X und Y identische Verteilungsgesetze. Beweisen Sie dies.

5. Zeigen Sie, dass für zwei identisch verteilte Zufallsvariable X und Y mit Werten in $(S, \mathcal{S})$ und einer messbaren Funktion $f : S \to \mathbb{R}$ auch $f(X)$ und $f(Y)$ identisch verteilt sind.

Abgabe: 27. 10. 09