Übungen zur Vorlesung
"Wahrscheinlichkeitstheorie"

WS 2008/2009

13. Serie

1. Es sei (X_n) eine unabhängige identisch verteilte Folge zufälliger Größen. Man beweise: 6 P

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = 0 \quad P\text{-f.s.} \Longleftrightarrow E|X_1| < +\infty.$$

Was kann man ohne die Unabhängigkeit von (X_n) aussagen?
Hinweis: Man zeige zunächst, dass X_1 genau dann integrierbar ist, wenn für alle $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\{|X_1| \geq n \cdot \varepsilon\}) < +\infty$$

gilt.

2. Es seien X_n, X zufällige Größen. Die Folge (X_n) sei monoton. Man zeige: 4 P

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X \quad \text{in} \quad \text{Wkt.} \quad \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} X_n = X \quad P\text{-f.s.}$$

3. Es sei φ die charakteristische Funktion einer Verteilung Q auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Es gelte: $\varphi \geq 0, \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt < +\infty$.

   (a) Man zeige, dass Q eine stetige Dichte f besitzt. 2 P

   (b) Es sei 2 P

   $$c = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt.$$

   Man setze

   $$f^*(x) = \frac{1}{c}\varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

   Dann ist f^* eine Wahrscheinlichkeitsdichte mit der Eigenschaft, dass die charakteristische Funktion der Verteilung mit der Wahrscheinlichkeitsdichte f gerade $c\, f^*$ ist. Die Funktion f^* heißt die zu f adjungierte Dichte.

   (c) Man zeige umgekehrt, dass die charakteristische Funktion der Verteilung mit der Wahrscheinlichkeitsdichte f^* gerade $\frac{1}{f(0)}f$ ist. Mit anderen Worten ist die charakteristische Funktion der Verteilung mit der Dichte f^* wiederum reell und nicht negativ sowie integrierbar. Es kann somit $(f^*)^*$ gebildet werden, und es folgt $(f^*)^* = f$. Das Paar (f, f^*) heißt Paar zueinander adjungierter Wahrscheinlichkeitsdichten. Die Funktionen f und f^* sind bis auf eine multiplikative Konstante zugleich charakteristische Funktionen, und zwar der durch f^* und f bestimmten Verteilungen. 2P

(d) Man berechne zu folgenden Wahrscheinlichkeitsdichten f die adjungierten Dichten f^*: 4 P

1) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2}), \quad x \in \mathbb{R}$.
2) $f(x) = \frac{1}{2} \exp(-|x|), \quad x \in \mathbb{R}$.
3) $f(x) = \frac{1}{2} \max\{0, 1 - |\frac{x}{2}|\}, \quad x \in \mathbb{R}$.

(e) Eine Wahrscheinlichkeitsdichte f heißt selbstadjungiert, falls f^* definiert ist (d. h., die charakteristische Funktion φ der Verteilung mit der Dichte f reell, nichtnegativ und integrierbar ist) und $f^* = f$ gilt. Mit anderen Worten, f ist selbstadjungiert genau dann, wenn die charakteristische Funktion φ ihrer Verteilung bis auf eine multiplikative Konstante mit f übereinstimmt: 2 P

$$\varphi(t) = cf(t) \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dabei ist $c = (f(0))^{-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt$. Offensichtlich ist f mit

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2}), \quad x \in R,$$

selbstadjungiert. Man überzeuge sich außerdem davon, dass für eine selbstadjungierte Dichte f stets $f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ gilt.
Preisfrage: Gibt es über die Dichte der Standard-Normalverteilung hinaus weitere selbstadjungierte Dichten?

Abgabe: Freitag, 6. Februar 2009, zur Übungszeit

*) 14 Punkte entsprechen 100%