Übungen zur Vorlesung
"Wahrscheinlichkeitstheorie"

WS 2008/2009

12. Serie

1. Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{G}$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathcal{F}$. Es bezeichne $L^p = L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ den Banachraum der p-fach integrierbaren zufälligen Größen ($p \geq 1$). Der lineare Operator $E_{\mathcal{G}} : L^1 \to L^1$ sei definiert gemäß 6 P

$$E_{\mathcal{G}}(X) = E(X|\mathcal{G}) \ , \ X \in L^1,$$

wobei $E(X|\mathcal{G})$ den bedingten Erwartungswert von X unter der Bedingung $\mathcal{G}$ bezeichnet. Man beweise, dass dann für jedes $p \geq 1$ die Einschränkung von $E_{\mathcal{G}}$ auf L^p den Banachraum L^p invariant lässt und dass gilt:

$$||E_{\mathcal{G}}(X)||_p \leq ||X||_p \ , \ X \in L^p.$$

Somit ist der lineare Operator $E_{\mathcal{G}} : L^p \to L^p$ beschränkt (also auch stetig). Man berechne $||E_{\mathcal{G}}||_p$.

2. Man zeige: 6 P

   (a) Der lineare Operator $E_{\mathcal{G}} : L^p \to L^p$ ist idempotent: $E_{\mathcal{G}}^2 = E_{\mathcal{G}}$.

   (b) Der lineare Operator $E_{\mathcal{G}} : L^2 \to L^2$ ist selbstadjungiert.

   Mit Hilfe von (a) und (b) schlussfolgere man, dass $E_{\mathcal{G}} : L^2 \to L^2$ ein Projektionsoperator ist. Man bestimme den zugehörigen Unterraum H von L^2.

3. Es bezeichne $H = L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$. Man zeige, dass dann gilt: 6 P

   (a) $E_{\mathcal{G}}(X) \in H \ , \ X \in L^2$.

   (b) $X - E_{\mathcal{G}}(X)$ ist orthogonal auf H.

   Daraus schließe man, dass $E_{\mathcal{G}} = \mathcal{P}_H$ gilt, wobei $\mathcal{P}_H$ die Projektion von L^2 auf H bezeichnet.

4. Die folgende funktionalanalytische Methode ist geeignet zur Einführung des bedingten Erwartungswertes: Es bezeichne $\mathcal{P}$ die Projektion von L^2 auf $H = L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$. Man zeige, dass dann $\mathcal{P}$ als Operator aus L^1 in L^1 linear und stetig ist und somit eine eindeutige Fortsetzung zu einem stetigen linearen Operator $\bar{\mathcal{P}} : L^1 \to L^1$ erlaubt. Man zeige, dass dann gilt: 6 P

$$\bar{\mathcal{P}}(X) = E(X|\mathcal{G}) \ P\text{-f.s.} \ X \in L^1.$$

Abgabe: Freitag, 30. Januar 2009, zur Übungszeit

*) 14 Punkte entsprechen 100%