Übungen zur Vorlesung
"Wahrscheinlichkeitstheorie"

WS 2008/2009

11. Serie

1. Es sei f eine stetige Funktion auf $[0,1]$. Die Funktion B_n^f mit 6 P

$$B_n^f(x) = \sum_{k=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad x \in [0,1],$$

heißt das zu f gehörige n-te Bernstein-Polynom.

(a) Unter Ausnutzung des Gesetzes der Großen Zahlen zeige man die Beziehung

$$\lim_{n\to\infty} B_n^f(x) = f(x), \quad x \in [0,1].$$

(b) Man beweise, dass die Folge (B_n^f) sogar gleichmäßig gegen f konvergiert. (Das liefert einen elementaren, wahrscheinlichkeitstheoretischen Zugang zum Satz von Weierstraß über die Dichtheit der Polynome im Raum $C([0,1])$ der stetigen Funktionen über dem Intervall $[0,1]$.)

2. Es bezeichne $L^\circ = L^\circ(\Omega, \mathcal{F}, P)$ den linearen Raum aller Äquivalenzklassen zufälliger Größen auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Es seien $X, Y \in L^\circ$. Der Lévy Abstand d ist dann definiert als 6 P

$$d(X,Y) = \inf\{\varepsilon > 0 : P(\{|X-Y| > \varepsilon\}) < \varepsilon\}.$$

(a) Man zeige, dass d eine Metrik ist.

(b) Man beweise, dass die zur Metrik d gehörige Konvergenz gerade die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit ist.

3. Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, m)$ ein bliebiger Maßraum und $f = u + iv$ eine messbare komplexwertige Funktion. Wir sagen, dass f integrierbar ist, wenn die (messbaren) reellen Funktionen u und v integrierbar sind, und setzen in diesem Fall 6 P

$$\int_\Omega f\ dm = \int_\Omega u\ dm + i \int_\Omega v\ dm.$$

Man zeige: Die Funktion f ist genau dann integrierbar, wenn die (messbare) reelle Funktion $|f|$ integrierbar ist, und es gilt dann

$$|\int_\Omega f\ dm| \leq \int_\Omega |f| dm.$$

Bleibt die Aussage richtig wenn der Betrag $|.|$ durch eine bliebige Norm auf den komplexen Zahlen ersetzt wird?

4. Es seien X_1, X_2 von einander unabhänige integrierbare komplexwertige zufällige Variable auf einem Wahrscheinliichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Man zeige, dass dann auch $X_1 \cdot X_2$ integrierbar ist und 4 P

$$EX_1 \cdot X_2 = EX_1 \cdot EX_2$$

gilt.

Abgabe: Freitag, 23. Januar 2009, zur Übungszeit

*) 16 Punkte entsprechen 100%