Übungen zur Vorlesung
"Wahrscheinlichkeitstheorie"

WS 2008/2009

10. Serie

1. Man zeige, dass eine charakteristische Funktion φ eines zufälligen Vektors stets positiv semidefinit ist: 4 P

$$\sum_{i,j=1}^{m} \varphi(u_i - u_j) z_i \bar{z}_j \geq 0$$

für alle $u_1, \ldots, u_m \in R^n$ und komplexe Zahlen $z_1, \ldots, z_m$.

2. Es sei (X_n) eine unabhängige und identisch verteilte Folge zufälliger Größen mit endlichem Erwartungswert. 6 P

   (a) Mit Hilfe der Methode der charakteristischen Funktionen leite man das schwache Gesetz der Großen Zahlen ab.

   (b) Es gelte zusätzlich $0 < EX_1^2 < +\infty$. Man zeige, dass das schwache Gesetz der Großen Zahlen für (X_n) eine Folgerung des zentralen Grenzwertsatzes für (X_n) ist.

3. De Moivre bewies 1733 den zentralen Grenzwertsatz für das Bernoulli-Schema mit Hilfe der Stirlingschen Formel (vgl. Vorlesung "Elementare WMS"), die J. Stirling erst drei Jahre vorher fand. Umgekehrt ist die Stirlingsche Formel aus dem zentralen Grenzwertsatz ableitbar: Es sei (X_n) eine unabhängige, mit dem Parameter 1 Poisson-verteilte Folge zufälliger Größen und 6 P

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(X_k - EX_1)}{\sqrt{n \text{ Var } X_1}}.$$

Es gilt dann

$$P_{S_n} \Longrightarrow N(0,1).$$

Daraus leite man für die Funktion

$$f(x) = \max\{-x, 0\}, \quad x \in R,$$

die Beziehung

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_R f(x) P_{S_n}(dx) = \int_R f(x) N(0,1)(dx)$$

ab, indem man f durch die beschränkten stetigen Funktionen $f_m = f \wedge m$ approximiert. Schließlich berechne man beide Seiten der Identität und stelle fest, dass ihre Gleichheit gerade die Stirlingsche Formel ist.

4. Unter Benutzung des zentralen Grenzwertsatzes beweise man die Beziehung 6 P

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

Abgabe: Freitag, 16. Januar 2009, zur Übungszeit

*) 16 Punkte entsprechen 100%