Übungen zur Vorlesung
"Wahrscheinlichkeitstheorie"

WS 2008/2009

7. Serie

1. Es sei (E, d) ein vollständiger separabler metrischer Raum. Für $a \in E$ bezeichne δ_a das Dirac-Maß in a. Gegeben sei eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ aus E. 5 P
   (a) Man charakterisiere die schwache Konvergenz der Folge $(\delta_{a_n})_{n\geq 1}$ gegen ein $\mu \in \mathcal{M}(E)$.
   (b) Man charakterisiere die Straffheit der Folge von Maßen $(\delta_{a_n})_{n\geq 1}$.
   (c) Man betrachte die Abbildung $F : E \to \mathcal{M}(E)$ mit
   $$F(a) = \delta_a, \quad a \in E.$$
   Welche Eigenschaften besitzt F?

2. Gegeben sei eine Folge von Normalverteilungen $(N(a_n, \sigma_n^2))_{n\geq 1}$ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. 5 P
   (a) Man gebe Bedingungen für die schwache Konvergenz gegen ein $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$.
   (b) Man gebe Bedingungen für die Straffheit und die relative schwache Kompaktheit der Folge von Normalverteilungen.

3. Es sei E eine höchstens abzählbar unendliche Menge, versehen mit der diskreten Metrik d: 5 P
   $$d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y, \end{cases}$$
   für alle $x, y \in E$. Man beschreibe die schwache Konvergenz von Wahrscheinlichkeitsmaßen P_n gegen ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf E. Was bedeutet Straffheit und relative schwache Kompaktheit von $(P_n)_{n\geq 1}$ in diesem Falle?

4. Gegeben seien zufällige Größen X_n und X mit 5 P
   $$X_n \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} X.$$
   Man beweise, daß dann
   $$\mathbb{E}|X| \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n|$$
   erfüllt ist. (Das ist eine Aussage, die dem Lemma von Fatou ähnelt.)

Abgabe: Freitag, 12. Dezember 2008, zur Übungszeit