Übungen zur Vorlesung
"Wahrscheinlichkeitstheorie"

WS 2008/2009

6. Serie

1. Es sei $C([0,1])$ der Raum der auf dem Intervall $[0,1]$ definierten reellwertigen stetigen Funktionen. Bezüglich der Metrik d mit 5 P

$$d(x,y) = \sup_{t\in[0,1]} |x(t) - y(t)| \quad , \quad x,y \in C([0,1])$$

bildet $C([0,1])$ einen vollständigen metrischen Raum. Man überlege sich, dass dieser Raum sogar separabel ist. Man kann nun in $C([0,1])$ zwei σ-Algebren einführen:

1) Die σ-Algebra $\mathcal{B}(C([0,1]))$ der Borelmengen in $C([0,1])$.

2) Es seien X_t für $t \in [0,1]$ die Koordinatenabbildungen

$$X_t(x) = x(t) \quad , \quad x \in C([0,1]).$$

Die σ-Algebra $\mathcal{C}([0,1])$ sei definiert als die kleinste aller σ-Algebren $\mathcal{G}$ von Teilmengen von $C([0,1])$, so dass X_t von $(C([0,1]),\mathcal{G})$ in $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ für alle $t \in [0,1]$ messbar ist. Mit anderen Worten wird $\mathcal{C}([0,1])$ von dem Mengensystem

$$\{\{x \in C([0,1]) : X_t(x) \in A\} : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), t \in [0,1]\}$$

erzeugt.

(a) Man beweise, dass die σ-Algebren $\mathcal{B}(C([0,1]))$ und $\mathcal{C}([0,1])$ übereinstimmen.

(b) Wie kann man im Raum $C([0,+\infty))$ eine Metrik d einführen, so dass der metrische Raum vollständig und separabel wird sowie die entsprechenden σ-Algebren $\mathcal{B}(C([0,+\infty)))$ und $\mathcal{C}([0,+\infty))$ zusammenfallen?

2. Es sei (E,d) ein metrischer Raum, $\mathcal{B}(E)$ die σ-Algebra der Borelmengen und Q ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(E,\mathcal{B},(E))$. Die Gesamtheit der Stetigkeitsmengen $A \in \mathcal{B}(E)$ bezüglich Q (d. h., $Q(\partial A) = 0$) sei mit $\mathcal{A}_Q$ bezeichnet. 5 P

(a) Man zeige, dass $\mathcal{A}_Q$ eine Algebra von Teilmengen E ist.

(b) Man beweise außerdem, dass $\mathcal{A}_Q$ die σ-Algebra $\mathcal{B}(E)$ erzeugt.

(c) Man überzeuge sich durch Beispiele, dass im Allgemeinen $\mathcal{A}_Q$ keine σ-Algebra ist.

(d) Es sei Q die Gleichverteilung (Lebesgue-Maß) auf $[0, 1]$. Wie ist dann die Situation?

3. Für eine Permutation π der Zahlen $1, \ldots, n$ wird in natürlicher Weise eine Abbildung π von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$ durch 4 P

$$\pi(x_1, \ldots, x_n) := (x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)})$$

definiert. Mit $\mathcal{G}$ bezeichne man diejenigen Borelmengen $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, die invariant bzgl. aller Permutationen π der Koordinaten sind; d. h., $B \in \mathcal{G}$, falls für alle Permutationen π stets $x \in B$ genau dann gilt, wenn $\pi(x) \in B$ erfüllt ist.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{G}$ eine Unter-σ-Algebra der Borelmengen des $\mathbb{R}^n$ ist.

(b) Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $\mathbb{R}$, und P sei auf $\mathbb{R}^n$ das n-fache Produktmaß von Q. Wie berechnet sich mit diesem P der bedingte Erwartungswert

$$E(X|\mathcal{G})$$

einer auf $\mathbb{R}^n$ definierten P-integrierbaren zufälligen Größe X?

4. Jemand behauptet, dass er mit einer Nadel und einem Blatt Papier die Zahl π bestimmen kann, und zwar auf folgende Weise: Man zeichne auf das Blatt einen Korridor, der so breit wie die Nadel lang ist. Dann werfe man die Nadel auf "gut Glück" auf das Blatt Papier. Gezählt werden alle Versuche, bei denen die Nadel zumindest zum Teil im Inneren des Korridors landet. Diese Zahl sei N. Als Erfolg betrachte man, wenn die Nadel die Korridorbegrenzung schneidet. Die Anzahl der Erfolge in N Versuchen sei n. Dann soll gelten: 5 P

$$\pi \approx \frac{2N}{n}.$$

(a) Man überprüfe die Aussage experimentell.

(b) Sollte das Experiment die Aussage bestätigen, so suche man nach einer wahrscheinlichkeitstheoretischen Begründung.

Abgabe: Freitag, 5. Dezember 2008, zur Übungszeit