Übungen zur Vorlesung

"Wahrscheinlichkeitstheorie"

WS 2008/2009

5. Serie

1. Es sei (Y, Z) ein 2-dimensionaler normalverteilter zufälliger Vektor mit dem Erwartungswertvektor $a = (a_1, a_2)$ und der Kovarianzmatrix **6 P**

$$R = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & r \\ r & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

mit $\sigma_1^2 > 0$ und $\sigma_2^2 > 0$.

   (a) Man bestimme die bedingte Dichte $f_{Z|Y=y}$ und die bedingte Verteilung $P_Z(y, \cdot)$ von Z unter der Bedingung $Y = y$.

   (b) Man berechne den bedingten Erwartungswert $E(Z|Y = y)$ sowie die bedingte Varianz $E((Z - E(Z|Y = y))^2|Y = y)$ von Z unter der Bedingung $Y = y$.

   (c) Wie sehen die entsprechenden Größen

$$E(Z|Y) \quad \text{sowie} \quad E((Z - E(Z|Y))^2|Y)$$

   aus?

Hinweis:
Bei der Darstellung der zweidimensionalen Dichte $f_{(Z,Y)}$ empfielt es sich, den Korrelationskoeffizienten $\rho = \dfrac{r}{\sigma_1 \cdot \sigma_2}$ zu benutzen.

2. Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{G}$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathcal{F}$ sowie X eine zufällige Größe. Eine Schätzung von X auf der Grundlage des Versuchs $\mathcal{G}$ ist jede $\mathcal{G}$-meßbare zufällige Größe $\hat{X}$. Ist X als integrierbar vorausgesetzt, so heißt eine Schätzung $\hat{X}$ von X (auf der Grundlage des Versuchs $\mathcal{G}$)*erwartungstreu*, falls $\hat{X}$ ebenfalls integrierbar ist und $E(\hat{X}) = E(X)$ erfüllt ist. Als Maß der Güte einer Schätzung $\hat{X}$ von X führen wir die mittlere quadratische Abweichung **6 P**

$$\triangle(X, \hat{X}) = E(X - \hat{X})^2$$

ein; $\triangle(X, \hat{X})$ heißt der Fehler der Schätzung $\hat{X}$ im Quadratmittel. Die Größe

$$\triangle(X) = \inf \triangle(X, \hat{X}),$$

wobei das Infimum über alle Schätzungen $\hat{X}$ von X genommen wird, heißt minimaler Fehler bei der Schätzung von X aufgrund $\mathcal{G}$. Eine Schätzung $\hat{X}$ von X heißt im Quadratmittel beste Schätzung, falls

$$\triangle(X, \tilde{X}) = \triangle(X)$$

erfüllt ist. Man beweise: Gilt $E(X^2) < +\infty$, so existiert P-f.s. genau eine im Quadratmittel beste Schätzung $\hat{X}$ von X; diese ist erwartungstreu und besitzt die Gestalt $\hat{X} = E(X|\mathcal{G})$ P-f.s.

3. Es sei (X, Y) ein zweidimensionaler normalverteilter zufälliger Vektor. 6 P

   (a) Man berechne die im Quadratmittel beste Schätzung $\hat{X}$ von X aufgrund von Y (d. h., aufgrund von $\mathcal{G} = \mathcal{F}^Y$, wobei $\mathcal{F}^Y$ die von Y erzeugte Unter-σ-Algebra bezeichne).

   (b) Wie groß ist der minimale Fehler bei der Schätzung von X aufgrund von Y?

   (c) Eine Messung (Beobachtung) hat die Realisierung $Y = y$ ergeben. Wie ist dann X zu schätzen? Hängt der Fehler der Schätzung vom Meßwert y ab?

Abgabe: Freitag, 28. November 2008, zur Übungszeit