Übungen zur Vorlesung

"Wahrscheinlichkeitstheorie"

WS 2008/2009

4. Serie

1. Es sei Ω eine beliebige nichtleere Menge und $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, \cdots\}$ eine abzählbare Zerlegung von Ω. 5 P

   (a) Man bestimme die Gestalt der von $\mathcal{D}$ erzeugten σ-Algebra $\sigma(\mathcal{D})$.

   (b) Ist $\sigma(\mathcal{D})$ wiederum abzählbar?

   (c) Man charakterisiere die messbaren Funktionen auf $(\Omega, \sigma(\mathcal{D}))$.

2. Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Warscheinlichkeitsraum und $X = (X_1, X_2)$ ein zufälliger Vektor. Man betrachte die folgenden Fälle: 4 P

   (a) X ist gleichverteilt auf $[0,\ 1]\times\ [0,\ 1]$.

   (b) X ist gleichverteilt auf dem Einheitskreis $C = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$.

   Ist der zufällige Vektor X unabhängig? Man bestimme die Verteilungsgesetze von X_1 und X_2.

3. Es sei $X = (X_1, X_2)$ ein zufälliger Vektor, der auf dem Einheitskreis $C = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ gleichverteilt ist. Wir bezeichnen mit (R, Θ) die Polarkoordinaten von (X_1, X_2), d. h., R und Θ sind zufällige Größen mit $0 \leq R \leq 1$ und $-\pi \leq \Theta \leq \pi$, so dass 4 P

   $$X_1 = R\cos\Theta, \quad X_2 = R\sin\Theta$$

   erfüllt ist. Man zeige, dass R und Θ unabhängig sind. Man bestimme die Verteilungsgesetze von R und Θ.

4. Man beweise den Satz von B. Levi über monotone Konvergenz für bedingte Erwartungswerte: Es sei $\mathcal{G}$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathcal{F}$ und X_n eine monoton wachsende Folge integrierbarer zufälliger Größen, so dass $X = \lim\limits_{n\to\infty} X_n$ integrierbar ist. Dann folgt: 4 P

   $$E(X|\mathcal{G}) = \lim_{n\to\infty} E(X_n|\mathcal{G}) \quad P\text{-f.s.}$$

   Hinweis: Zum Beweis benutze man den Satz von B. Levi über monotone Konvergenz für gewöhnliche Erwartungswerte.

Abgabe: Freitag, 21. November 2008, zur Übungszeit