Übungen zur Vorlesung
"Wahrscheinlichkeitstheorie"

WS 2008/2009

3. Serie

1. Die charakteristische Funktion φ_X einer zufälligen Größe X ist durch **4 P**

$$\varphi_X(t) = E\exp(i\ t\ X)\ , \quad t \in \mathbb{R},$$

definiert. (Ist $U = U_1 + i\ U_2$ eine komplexwertige zufällige Variable mit $E|U_j| < +\infty, \quad j = 1,2$, so ist der Erwartungsert $E\ U$ durch

$$E\ U = E\ U_1 + i\ E\ U_2$$

erklärt.) Man berechne die charakteristische Funktion einer $N(a, \sigma^2)$-verteilten zufälligen Größe.
Hinweis: Man reduziere das Problem auf den Fall $a = 0$ und $\sigma^2 = 1$. Nun berechne man das verbliebene komplexe Kurvenintegral durch Approximation über endliche Bereiche unter Anwendung des Integralsatzes von Cauchy.

2. Die charakteristische Funktion φ_X eines zufälligen Vektors $X = (X_1, \ldots, X_n)$ ist durch **4 P**

$$\varphi_X(t) = E\exp(i(X,t))\ , \quad t \in \mathbb{R}^n,$$

definiert. Dabei bezeichnet $(\cdot,\cdot)$ das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$. Für einen beliebigen Vektor $a \in \mathbb{R}^n$ und eine beliebige symmetrische und positiv definite $n \times n$-Matrix R berechne man die charakteristische Funktion eines $N(a, R)$-verteilten zufälligen Vektors X (sowohl im nichtausgearteten als auch im ausgearteten Fall).
Hinweis: Zunächst betrachte man anstelle von X einen standard-normalverteilten zufälligen Vektor Z. Dann nutze man aus, dass **definitionsgemäß** X dieselbe Verteilung wie $a + A(Z)$ mit $A = \sqrt{R}$ besitzt. [1].
Ergebnis:

$$\varphi_X(t) = \exp(i(a,t) - \frac{1}{2}(R(t),t)), \quad t \in \mathbb{R}^n.$$

---

[1] $\sqrt{R}$ ist definiert als $O \circ \sqrt{D} \circ O^T$, wobei O eine orthogonale Marix und D eine Diagonalmatrix mit nichtnegativen Einträgen derart ist, dass $R = O \circ D \circ O^T$ gilt (Satz über Hauptachsentransformation)

3. Man zeige: 5 P

   (a) Ein zufälliger Vektor $X = (X_1, \cdots, X_n)$ ist genau dann normalverteilt, wenn für alle $\mu \in \mathbb{R}^n$ die zufällige Größe (X, μ) normalverteilt ist. (Diese Aussage kann als Definition der n-dimensionalen Normalverteilung dienen.)

   (b) Ist $X = (X_1, \cdots, X_n)$ normalverteilt mit dem Parameter $(a, R)(a \in \mathbb{R}^n$, R symmetrische positiv semidefinite $n \times n$-Matrix) und $\mu \in \mathbb{R}^n$, so ist (X, μ) normalverteilt mit dem Parameter (m, σ^2), wobei $m = (a, \mu)$ und $\sigma^2 = (R(\mu), \mu)$ gilt.

   Hinweis: Für die Notwendigkeit der Bedingung in Aussage (a) benutze man die Konstruktion von X (vgl. Aufgabe 2) und ein entsprechendes Resultat aus der Vorlesung für lineare Transformationen *nichtausgearteter* normalverteilter zufälliger Vektoren. Für die Rückrichtung berechne man die charakteristische Funktion von X und benutze den Eindeutigkeitssatz für charakteristische Funktionen, der besagt, daß die Verteilungen zweier zufälliger Vektoren übereinstimmen, wenn ihre charakteristischen Funktionen gleich sind.

4. Es seien Q_1, Q_2 und Q_3 sowie Q Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. 3 P
   Man beweise:

   (a) $Q_1 \star Q_2 = Q_2 \star Q_1$.

   (b) $Q_1 \star (Q_2 \star Q_3) = (Q_1 \star Q_2) \star Q_3$.

   (c) $\delta_0 \star Q = Q \star \delta_0$,

   wobei δ_0 das Dirac-Maß im Nullvektor $0 \in \mathbb{R}^n$ bezeichnet.

Abgabe: Freitag, 14. November 2008, zur Übungszeit