Übungen zur Vorlesung
"Wahrscheinlichkeitstheorie"

WS 2008 /2009

2. Serie

1. Es sei $X = (X_1, \cdots, X_n)$ ein zufälliger Vektor mit $EX_i^2 < +\infty, i = 1, \cdots, n$, und es bezeichne R seine Kovarianzmatrix.
   (a) Man zeige, dass R symmetrisch und positiv semidefinit ist.
   (b) Es sei A eine $m \times n$-Matrix. Man zeige, dass dann $Y = (Y_1, \cdots, Y_n)$ mit
   $$Y^T = AX^T$$
   ein zufälliger Vektor mit der Kovarianzmatrix $A \circ R \circ A^T$ ist. (Ist B eine Matrix, so bezeichne B^T die zu B transponierte Matrix.)

2. Es seien $X = (X_1, \cdots, X_n)$ und $Y = (Y_1, \cdots, Y_m)$ normalverteilte zufällige Vektoren mit den Parametern (a, R_1) und (b, R_2) derart, dass X von Y unabhängig ist. Man beweise, dass dann auch der zufällige Vektor $Z = (X, Y) = (X_1, \cdots, X_n; Y_1, \cdots, Y_m)$ normalverteilt ist. Man bestimme den Parameter.

3. Es sei $X = (X_1, \cdots, X_n)$ ein zufälliger Vektor mit der Verteilungsfunktion F_X, und der Verteilungsdichte f_X, sofern letztere existiert. Für eine Auswahl von Indizes $i_1, \cdots, i_m$ mit $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq n$ und $m \leq n$ bestimme man Verteilungsfunktion und Verteilungsdichte des zufälligen Vektors $Y = (X_{i_1}, \cdots, X_{i_m})$.

4. Zusätzlich zu Aufgabe 3 sei bekannt, dass X eine Normalverteilung $N(a, R)$ besitzt. Man zeige, dass dann Y ebenfalls normalverteilt ist und bestimme den Parameter.

   Hinweise:
   (a) Zunächst überzeuge man sich, dass jede Permutation eines normalverteilten zufälligen Vektors wieder normalverteilt ist, und überlege sich die Gestalt des Parameters.
   (b) Man bestimme die Dichte von Y mit Hilfe von Aufgabe 3. Zur Vermeidung umfangreicher Rechnungen kann man wegen a) annehmen, dass $i_1 = 1, \cdots, i_m = m$ gilt. Durch sukzessives Schließen genügt es, den Fall $m = n - 1$ zu betrachten.

(c) Zur Vereinfachung der Rechnung empfiehlt es sich, zunächst eine nicht ausgeartete lineare Transformation A im $\mathbb{R}^n$

$$\tilde{X}^T = AX^T$$

durchzuführen, die folgendes leistet:

$$\tilde{X}_i = X_i \quad , \quad i = 1, \cdots, n-1,$$

$$\mathrm{Cov}(\tilde{X}_i, \tilde{X}_n) = \delta_{in} \quad , \quad i = 1, \cdots, n.$$

Aufgrund des entsprechenden in der Vorlesung bewiesenen Resultates ist dann $\tilde{X}$ wiederum normalverteilt.

Abgabe: Freitag, 7. November 2008, zur Übungszeit