Übungen zur Vorlesung

"Wahrscheinlichkeitstheorie"

WS 2008 /2009

1. Serie

1. Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Bekanntlich heißt eine Familie $(\mathcal{C}_i)_{i\in I}$ von Mengensystemen $\mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{F}, \quad i \in I$, unabhängig, wenn für beliebige $n \geq 1$ und Mengen $A_{i_k} \in \mathcal{C}_{i_k}, \quad k = 1, \cdots, n, \quad$ gilt:

$$P(\bigcap_{k=1}^{n} A_{i_k}) = \prod_{k=1}^{n} P(A_{i_k}).$$

   Man beweise (z. B. mit Hilfe des Satzes über Dynkin-Systeme vgl. H. Bauer: Maß- und Integrationstheorie, Satz 2.4) folgenden grundlegenden Sachverhalt:
   Enthält für jedes $i \in I$ das Mengensystem $\mathcal{C}_i$ mit je zwei Mengen auch deren Durchschnitt und ist $(\mathcal{C}_i)_{i\in I}$ unabhängig, so ist auch die Familie $(\sigma(\mathcal{C}_i))_{i\in I}$ der von $\mathcal{C}_i$ erzeugten σ-Algebren unabhängig.

2. Der folgende Satz ist bekannt unter dem Namen Gruppierungssatz: Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ eine unabhängige Familie von Unter-σ-Algebren $\mathcal{F}_i$ von $\mathcal{F}$. Weiterhin seien $(I_j)_{j\in J}$ eine Zerlegung des Indexbereiches I und $\mathcal{G}_j = \sigma(\cup_{i\in I_j} \mathcal{F}_i)$ für alle $j \in J$. Dann ist die Familie $(\mathcal{G}_j)_{j\in J}$ ebenfalls unabhängig.

   Hinweis: Man finde für jedes $j \in J$ geeignete durchschnittsabgeschlossene Mengensysteme $\mathcal{C}_j$ mit $\sigma(\mathcal{C}_j) = \mathcal{G}_j$, so dass $(\mathcal{C}_j)_{j\in J}$ unabhängig ist, und wende dann Aufgabe 1 an.

3. Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie zufälliger Variabler X_i mit Werten in dem messbaren Raum $(E_i, \mathcal{E}_i), i \in I$. Wir betrachten eine Zerlegung $(I_j)_{j\in J}$ von I und definieren

$$Y_j = (X_i)_{i\in I_j}$$

   als die Komposition der Abbildungen $X_i, i \in I_j$.

   (a) Man zeige, dass Y_j eine zufällige Variable mit Werten in dem Produktraum

$$(\bigotimes_{i\in I_j} E_i \quad , \quad \bigotimes_{i\in I_j} \mathcal{E}_i)$$

darstellt. Dabei ist $\bigotimes_{i \in I_j} \mathcal{E}_i$ als diejenige σ-Algebra definiert, die vom System aller Mengen $\times_{i \in I_j} A_i$ mit $A_i \in \mathcal{E}_i$ und $A_i \neq E_i$ für höchstens endlich viele $i \in I_j$ erzeugt wird.

(b) Ist die Familie $(X_i)_{i \in I}$ unabhängig, so ist auch die Familie der zufälligen Variablen $(Y_j)_{j \in J}$ unabhängig.

Hinweis: Man leite die Aussage aus dem Gruppierungssatz her!

4. Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sei eine unabhängige Familie $(X_i)_{i \in I}$ zufälliger Variabler X_i mit Werten in dem messbaren Raum $(E_i, \mathcal{E}_i)$ gegeben. Weiterhin seien f_i messbare Abbildungen von $(E_i, \mathcal{E}_i)$ in einen messbaren Raum $(\tilde{E}_i, \tilde{\mathcal{E}}_i)$. Man beweise, dass dann auch die Familie

$$(f_i(X_i))_{i \in I}$$

der zufälligen Variablen $f_i(X_i)$ mit Werten in $(\tilde{E}_i, \tilde{\mathcal{E}}_i)$ unabhängig ist.

Abgabe: Donnerstag, 30. Oktober 2008, zur Vorlesungszeit