

La topologie algébrique
UJF Grenoble - Hiver 2010/2011
Manuscrit Personnel

Stilianos Louca

11 janvier 2011

Table des matières

1	Préface	5
1.1	Qu'est-ce ce ?	5
2	Le groupe fondamental	5
2.1	Rappels de topologie	5
2.1.1	Definition : Espace connexe	5
2.1.2	Definition : Chemin	5
2.1.3	Definition : Espace connexe par arcs	5
2.2	Homotopies & Contractions	5
2.2.1	Definition : Homotopie	5
2.2.2	Caractérisation des nul-homotopies sur S^n	6
2.2.3	Definition : Chemins strictement homotopes	7
2.2.4	Definition : Chemin contractile	7
2.2.5	Lemme : Caractérisation de contractilité	7
2.2.6	Definition : Espace simplement connexe	8
2.2.7	Definition : Espace contractile	8
2.2.8	Caractérisation des espaces contractiles	8
2.2.9	Lemme : Connexité des espaces contractiles	9
2.2.10	Definition : Equivalence d'homotopie	9
2.2.11	Definition : Rétracte	9
2.3	Le groupe fondamental	10
2.3.1	Definition : Chemin inverse	10
2.3.2	Definition : Composition de chemins	10
2.3.3	Definition : Le groupe fondamental	11
2.3.4	Théorème : Invariance du groupe fondamental	11
2.3.5	Lemme : Groupes fondamentaux triviales	12
2.3.6	Lemme : Homomorphismes entre groupes fondamentaux	12
2.3.7	Lemme : Homotopies et groupes fondamentaux	13
2.3.8	Théorème : Groupes fondamentaux des espaces homotopiquement équivalents	13
2.3.9	Lemme : Produits de groupes fondamentaux	13
2.4	Le groupe fondamental de S^1 et S^2	14
2.4.1	Lemme : Relèvements de chemins dans S^1	14
2.4.2	Théorème : Relèvement d'une homotopie dans S^1	14
2.4.3	Definition : Degré	15
2.4.4	Lemme : Le degré comme un morphisme	15
2.4.5	Lemme : Le degré sur le groupe fondamental de S^1	16
2.4.6	Corollaire : Le groupe fondamental de S^1	16
2.4.7	Lemme : Le groupe fondamental de S^2	17
2.4.8	Lemme : Le groupe fondamental de S^2 avec deux trous	17
2.4.9	Corollaire : Théorème du point fixe de Brouwer	17

3	Revêtements	19
3.1	Revêtements et relèvements	19
3.1.1	Definition : Revêtement	19
3.1.2	Definition : Revêtements équivalents	20
3.1.3	Lemme sur revêtements et rétractes	20
3.1.4	Lemme : Topologie des espaces étales	20
3.1.5	Definition : Relèvement des applications	20
3.1.6	Lemme : Unicité des relèvements des applications	20
3.1.7	Théorème : Relèvements des chemins	21
3.1.8	Corollaire sur la cardinalité des fibres	22
3.1.9	Definition : Fibration	23
3.1.10	Lemme sur trivialisants et homotopies	23
3.1.11	Théorème : Relèvement des homotopies	24
3.1.12	Corollaire : Relèvements des homotopies de chemins	25
3.2	Action du groupe fondamental sur le fibre	25
3.2.1	Théorème : Revêtements comme homomorphismes injectifs	25
3.2.2	Definition : Action de monodromie du groupe fondamental sur fibres	26
3.2.3	Lemme : Propriétés de la monodromie	27
3.2.4	Corollaire sur la cardinalité des fibres	27
3.2.5	Lemme : Classes de conjugaison dans le groupe fondamental	28
3.3	Automorphismes de revêtements	28
3.3.1	Théorème de relèvements principal	28
3.3.2	Definition : Groupe des automorphismes d'un revêtement	29
3.3.3	Lemme sur automorphismes des revêtements	30
3.3.4	Lemme : Commutativité des automorphismes avec la monodromie	31
3.3.5	Lemme : Unicité des automorphismes d'un revêtement	31
3.3.6	Théorème : Existence d'automorphismes de revêtements	31
3.3.7	Lemme : Classes d'équivalence de revêtements	32
3.3.8	Théorème : Automorphismes comme permutations des fibres	32
3.3.9	Théorème : Structure du groupe des automorphismes	33
3.4	Revêtements galoisiens	34
3.4.1	Definition : Revêtement galoisien	34
3.4.2	Théorème : Caractérisation de revêtements galoisiens	34
3.4.3	Corollaire : Structure des revêtements galoisiens	35
3.4.4	Corollaire sur fibres de cardinal 2	35
3.4.5	Lemme : Actions de groupes proprement discontinues	35
3.4.6	Lemme : Discontinuité propre des automorphismes	36
3.4.7	Théorème : Représentation de l'espace base	36
3.4.8	Definition : Action du groupe fondamental sur l'espace total	37
3.5	Le théorème de van Kampen	37
3.5.1	Definition : Produit libre de deux groupes	37
3.5.2	Représentation du produit libre	37
3.5.3	Definition : Pushout de morphismes	38
3.5.4	Definition : Produit libre amalgamé	39
3.5.5	Lemme : Représentation du produit libre amalgamé	39
3.5.6	Théorème de Van Kampen	39
3.6	Revêtements universels	40
3.6.1	Definition : Revêtement universel	40
3.6.2	Théorème : Caractérisation des revêtements simplement connexes	40
3.6.3	Théorème : Universalité du revêtement universel	41
3.6.4	Lemme : Unicité du revêtement universel	41
3.6.5	Lemme sur revêtements universels et chemins	42
3.6.6	Definition : Relativement simplement connexe	42
3.6.7	Théorème : Existence des revêtements universelles	42
3.7	Fibrations	45
3.7.1	Équivalence d'homotopie de fibres	45
3.7.2	Théorème : Propriété principale de fibrations	45

3.7.3	Definition : Fibré localement triviale	45
3.8	Exemples	45
3.8.1	L'espace projectif réel	45
3.8.2	Les revêtements de S^1	46
3.8.3	Fonctions de degré 2 sur S^1	46
3.8.4	Le lemniscate de Bernoulli	47
3.8.5	Exemple : Groupe fondamental du tore avec un trou	48
3.8.6	Théorème de la boule chevelue	49
4	La cohomologie de de Rham	51
4.1	Complexes de cochaînes	51
4.1.1	Definition : Complexe de cochaînes	51
4.1.2	Definition : Suite exacte	51
4.1.3	Formule de sommation des dimensions pour suites exactes	51
4.1.4	Lemme des cinq	52
4.1.5	Definition : Application de cochaînes	52
4.1.6	Definition : Suite exacte d'applications de cochaînes	53
4.1.7	Théorème : Prolongation de suites exactes d'applications de cochaînes	53
4.1.8	Produit directe de complexes de cochaînes	54
4.2	Formes différentielles sur variétés	56
4.2.1	Definition : k -forme	56
4.2.2	Definition : Dérivée extérieure	56
4.2.3	Definition : k -forme pullback	57
4.2.4	Definition : Variété orientable	57
4.3	La cohomologie de de Rham	57
4.3.1	Definition : La cohomologie de de Rham	57
4.3.2	Definition : La cohomologie à support compact	58
4.3.3	Lemme de Poincaré	58
4.3.4	Definition : Groupe abélianisé	58
4.3.5	Théorème : La cohomologie de de Rham et le groupe fondamentale	59
4.3.6	Corollaire sur variétés simplement connexes	59
4.4	Invariance de la cohomologie de de Rham	59
4.4.1	Definition : Variétés homotopiquement équivalentes	59
4.4.2	Théorème : Invariance topologique de la cohomologie de de Rham	59
4.4.3	Lemme : Applications de cohomologies de de Rham	60
4.4.4	Lemme de Poincaré sur homotopies et la cohomologie de de Rham	60
4.4.5	Corollaire : Invariance homotopique de la cohomologie de de Rham	60
4.5	Le théorème de Mayer-Vietoris	60
4.5.1	Théorème de Mayer-Vietoris	60
4.5.2	Théorème de Mayer-Vietoris sur formes de support compact	61
4.5.3	Definition : Bon recouvrement	61
4.5.4	Théorème : Recouvrement bon de variétés	61
4.5.5	Théorème : Dimension finie de la cohomologie de de Rham	61
4.6	Cas spéciaux de cohomologies de de Rham	62
4.6.1	Lemme : Intégration de formes exactes	62
4.6.2	Lemme : Cohomologies de compositions de variétés	62
4.6.3	Théorème : L'espace $H_{\text{dR}}^n(M)$ pour variétés non-compactes	62
4.6.4	Théorème : L'espace $H_c^n(M)$	63
4.6.5	Théorème : Dualité de Poincaré	63
4.6.6	Corollaire de la dualité de Poincaré	64
4.6.7	Corollaire sur variétés contractiles	64
4.6.8	Théorème de Künneth : Produit de variétés	64
4.6.9	Definition : Degré d'une application	64
4.6.10	Théorème sur le degré des applications	65
4.7	La caractéristique d'Euler	65
4.7.1	Definition : Nombre de Betti et la caractéristique d'Euler	65
4.7.2	La caractéristique d'Euler pour variétés composés	66
4.7.3	Théorème sur CW-complexes	66

4.7.4	Théorème de Poincaré-Hopf	66
4.8	Exemples	66
4.8.1	Exemple : Les groupes de cohomologie de S^n	66
4.8.2	Exemple : La cohomologie de $S^2 \times S^2$	67
4.8.3	Exemple : La cohomologie du tore T^2	68
4.8.4	Exemple : La cohomologie de $\mathbb{RP}^2$ et $\mathbb{RP}^3$	68
4.8.5	Définition : L'espace projective complexe	70
4.8.6	Exemple : La cohomologie de $\mathbb{CP}^2$	70
4.8.7	Corollaire : Homéomorphie de la boule S^4	71
A	Annexe	72
A.0.8	Lemme de Lebesgue sur espaces compacts	72
A.0.9	Lemme : Fonctions sur S^1	72
A.0.10	Lemme sur la continuité de fonctions	72
A.0.11	Lemme sur recouvrements des espaces produits	72
A.0.12	Définition : Topologie quotient	73
A.0.13	Lemme : Caractérisation de bases des topologies	73
A.0.14	Lemme : Caractérisation de groupes quotients	73
B	Symboles & Abréviations	74
	Index	76

1 Préface

1.1 Qu'est-ce ce ?

Le suivant est un manuscrit personnel du cours de la topologie algébrique, offert par Prof. V. Sergiescu à l'UJF l'année 2010/2011.

2 Le groupe fondamental

2.1 Rappels de topologie

2.1.1 Definition: Espace connexe

Un espace topologique X est dit **connexe** ssi il n'est pas la réunion de deux ouverts non-vides disjoints. Il est dit **localement connexe** si pour tout point $x \in X$ et voisinage $U \ni x$, il existe un voisinage $x \in V \subseteq U$ tel que V est connexe.

2.1.2 Definition: Chemin

Soit X un espace topologique, $x, y \in X$. On appelle **chemin d'origine x et d'extrémité y** toute application continue $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ ($a < b \in \mathbb{R}$) telle que $\gamma(a) = x$ et $\gamma(b) = y$. On dit que x et y sont **reliés** ssi il existe un chemin d'origine x et d'extrémité y .

On dit γ un **chemin fermé** (ou **lacet**) ssi $x = y$. En ce cas on dit que γ est **basé en x** et appelle x le **point base** de γ .

Remarque : On peut regarder tout chemin fermé $\gamma : I \rightarrow X$ comme une application continue $S^1 \rightarrow X$ et vice versa.

2.1.3 Definition: Espace connexe par arcs

Un espace topologique X est dit **connexe par arcs**¹ ssi tout couple $x, y \in X$ est relié par un chemin. Un espace topologique X est dit **localement connexe par arcs** ssi pour tout $x \in X$ et voisinage $U \subseteq X$ de x , il existe un voisinage $x \in V \subseteq U$ tel que V est connexe par arcs.

Remarques :

- (i) Si X, Y sont espaces topologiques, X connexe (par arcs) et $f : X \rightarrow Y$ continue, alors $f(Y)$ est connexe (par arcs).
- (ii) Tout espace topologique connexe par arcs (localement connexe par arcs) est connexe (localement connexe).
- (iii) Tout produit d'espaces connexes (par arcs) est aussi connexe (par arcs).
- (iv) Tout espace connexe et localement connexe par arcs est connexe par arcs[3].

2.2 Homotopies & Contractions

2.2.1 Definition: Homotopie

Soient X, Y espaces topologiques et $f, g : X \rightarrow Y$ deux applications continues. Une application $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ continue par rapport à la topologie produit de $X \times [0, 1]$ est dit une **homotopie entre f et g** ssi $H(\cdot, 0) = f$ et $H(\cdot, 1) = g$.

Si en plus $A \subseteq X$ est tel que $H(x, t) = f(x) = g(x) \quad \forall x \in A, t \in [0, 1]$, alors H est dit homotopie **relative** à A . On dit que f, g sont **homotopes** ssi il existe une homotopie entre eux. Si $g(X) = \{x_0\}$ pour un point $x_0 \in X$, on dit l'homotopie **nul-homotopie** et la fonction f **nul-homotope** (à x_0).

1. Anglais : Path connected.

Exemples :

- (i) Soit Y un espace topologique et $y_0, y_1 \in Y$ deux points reliés par le chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow Y$. Alors, pour tout espace topologique $X \neq \emptyset$ l'application

$$H : X \times [0, 1] \rightarrow Y, \quad \Gamma(x, t) := \gamma(t)$$

est une homotopie entre les constantes $h_0 \equiv y_0$ et $h_1 \equiv y_1$.

D'autre part, si $z_0, z_1 \in Y$ sont homotopes par n'importe quelle homotopie $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$, c'est à dire $F(\cdot, 0) \equiv z_0$ et $F(\cdot, 1) \equiv z_1$, alors z_0, z_1 sont reliés. En fait, $F(x, \cdot) : [0, 1] \rightarrow Y$ est un chemin entre eux.

- (ii) Soit $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ la surface de la boule unité dans $\mathbb{R}^3$ et $R(\alpha) \in \text{SO}(3)$ la rotation dans $\mathbb{R}^3$ autour d'une certaine axe par l'angle α . Alors, l'application

$$H : S^2 \times [0, 1] \rightarrow S^2, \quad H(\cdot, t) := R(t\pi)|_{S^2}$$

est une homotopie entre l'identité Id_{S^2} et la transformation $R(\pi)|_{S^2}$.

Remarques :

- (i) L'homotopie est une relation d'équivalence sur les fonctions continues $X \rightarrow Y$, noté $\sim_h$. Les classes d'équivalence induites s'appellent **classes d'homotopie**. On note $[f]_h$ la classe d'homotopie de $f : X \rightarrow Y$.
- (ii) Soient $X, (Y_i)_{i \in I}$ espaces topologiques et $F_i : X \times [0, 1] \rightarrow Y_i$ n'importe lesquelles. Soit $Y := \prod_{i \in I} Y_i$ l'espace produit des Y_i . Alors, l'application $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ définie par

$$F(x, t) := (F_i(x, t))_{i \in I}, \quad x \in X, \quad t \in [0, 1]$$

est une homotopie ssi tout F_i est une homotopie. Si $f_i : X \rightarrow Y_i$ sont continues, alors la classe d'homotopie de $(f_i)_{i \in I}$ est donnée par

$$[(f_i)_{i \in I}]_h = \prod_{i \in I} [f_i]_h.$$

En particulier, une continue $f : X \rightarrow Y$ est nul-homotope ssi ses composants $f_i : X \rightarrow Y_i$ sont nul-homotopes.

- (iii) Soient X, Y deux espaces topologiques, $y, y' \in Y$ et $f : X \rightarrow Y$ continue, nul-homotope à y . Alors f est aussi nul-homotope à y' ssi y et y' sont reliés. Cela suit d'exemple 2.2.1(i).

2.2.2 Caractérisation des nul-homotopies sur S^n

Soit X un espace topologique. Soit B^{n+1} la boule unité dans $\mathbb{R}^{n+1}$, $S^n = \partial B^{n+1}$ et $f : S^n \rightarrow X$ continue. Alors, f est nul-homotope ssi il peut être prolongée à une fonction continue $\tilde{f} : B^{n+1} \rightarrow X$, c.a.d. $\tilde{f}|_{S^n} = f$.

Preuve :

Direction $\Rightarrow$: Soit $H : S^n \times [0, 1] \rightarrow X$ une nul-homotopie de f . Alors l'application $\tilde{f} : B^{n+1} \rightarrow X$ définie par

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} H(x/\|x\|, 1 - \|x\|) & : x \neq 0 \\ H(\cdot, 1) & : x = 0 \end{cases}$$

est continue sur B^{n+1} et une prolongée de f .

Direction $\Leftarrow$: Soit $\tilde{f} : B^{n+1} \rightarrow X$ continue et une prolongation de f . Alors, l'application $H : S^n \times [0, 1] \rightarrow X$ définie comme $H(x, t) := \tilde{f}(x \cdot (1 - t))$ est une nul-homotopie de f .

□

2.2.3 Definition: Chemins strictement homotopes

Deux chemins $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow X$ dans un espace topologique X sont dit **strictement homotopes** ssi il y a une application $\Gamma : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow X$ continue telle que Γ est une homotopie entre γ_0 et γ_1 et en plus $\Gamma(a, t) = \gamma_0(a)$, $\Gamma(b, t) = \gamma_0(b)$ pour tout $t \in [0, 1]$. Autrement dit, tout $\Gamma(\cdot, t)$ est un chemin entre les mêmes points. On dit Γ une **homotopie de chemins stricte** et on note $\gamma_0 \sim_{hs} \gamma_1$.

Remarques

- (i) L'homotopie stricte $\sim_{hs}$ entre chemins est une relation d'équivalence. Ses classes d'équivalence $[\cdot]_{hs}$ sont dites **classes d'homotopie stricte**.
- (ii) Soient $(Y_i)_{i \in I}$ espaces topologiques et $\gamma_{0i}, \gamma_{1i} : [0, 1] \rightarrow Y_i$, $i \in I$ chemins. Alors, $(\gamma_{0i})_{i \in I} : [0, 1] \rightarrow (Y_i)_{i \in I}$ est strictement homotope à $(\gamma_{1i})_{i \in I}$ ssi tout γ_{0i} est strictement homotope à γ_{1i} .

2.2.4 Definition: Chemin contractile

Soit X un espace vectoriel. Alors, un chemin $\gamma : S^1 \rightarrow X$ fermé est dit **contractile** (à x_0) si il est nul-homotope, c.a.d. il existe une homotopie $\Gamma : S^1 \times [0, 1] \rightarrow X$ telle que $\Gamma(\cdot, 0) = \gamma$ et $\Gamma(\cdot, 1) \equiv x_0$ pour un $x_0 \in X$.

On dit que $\gamma : S^1 \rightarrow X$ est **strictement contractile** à $x_0 \in \gamma(S^1)$, si pour un $s_0 \in S^1$ on a $\Gamma(s_0, t) = x_0 \forall t \in [0, 1]$, c'est à dire l'homotopie est stricte. On note $[x_0]_{hs}$ la classe d'homotopie stricte des lacets strictement contractiles à x_0 .

Note que par 2.2.5 tout chemin est contractile ssi il est strictement contractile.

2.2.5 Lemme : Caractérisation de contractilité

Soit X un espace vectoriel, $x \in X$ n'importe quel et $\gamma : S^1 \rightarrow X$ un lacet basé en $y \in X$. Alors, le suivants sont équivalents :

1. Le lacet $\gamma : S^1 \rightarrow X$ est contractile à x .
2. Les points x et y sont reliés et γ est contractile à y .
3. Les points x et y sont reliés et γ est strictement contractile à y .
4. Le lacet γ peut être prolongé en une fonction continue $\tilde{\gamma} : B^2 \rightarrow X$, où B^2 est la boule unité (fermée) dans $\mathbb{R}^2$ et $\tilde{\gamma}(0) = x$.

Preuve :

1 $\Rightarrow$ 2 : Soit $\gamma(s_0) = y$ pour un $s_0 \in S^1$. Soit $\Gamma : S^1 \times [0, 1] \rightarrow X$ une nul-homotopie entre γ et x . Alors $\Gamma(s_0, \cdot) : [0, 1] \rightarrow X$ est un chemin entre y et x . Par remarque 2.2.1(iii), γ est nul-homotope à y .

2 $\Rightarrow$ 1 : Suit de remarque 2.2.1(iii).

2 $\Rightarrow$ 3 : On considère le lacet comme $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ et suppose $\gamma(0) = \gamma(1) = y$. Soit $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ une homotopie entre γ et y , telle que $\Gamma(0, t) = \Gamma(1, t) \forall t \in [0, 1]$. Alors, l'application $\tilde{\Gamma} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ définie comme

$$\tilde{\Gamma}(s, t) := \begin{cases} \Gamma(0, 4st) & : 0 \leq s \leq \frac{1}{4} \\ \Gamma(2s - \frac{1}{2}, t) & : \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{3}{4} \\ \Gamma(0, t + (1-t)(4s-3)) & : \frac{3}{4} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

est une homotopie stricte entre γ et y , c'est à dire satisfait $\tilde{\Gamma}(0, t) = y \forall t \in [0, 1]$.

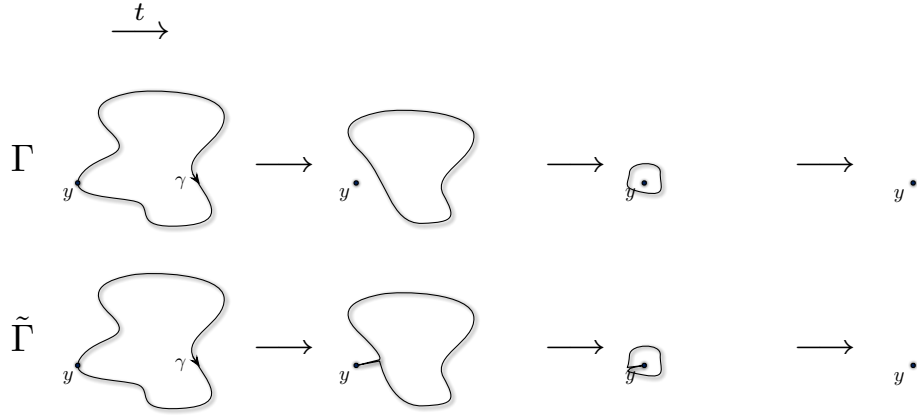


FIGURE 1: Sur la contractilité d'un chemin à un point y dans son image, qui est équivalente à sa contractilité stricte.

$3 \Rightarrow 2$: Trivial.

$1 \Leftrightarrow 4$: Implication de 2.2.2.

□

2.2.6 Définition: Espace simplement connexe

Un espace topologique X connexe par arcs est dit **simplement connexe** ssi tout chemin fermé sur X est contractile.

Remarque : La connexité simple est une invariante d'homeomorphie.

2.2.7 Définition: Espace contractile

Un espace topologique X est dit **contractile** (à x_0) ssi l'identité $\text{Id} : X \rightarrow X$ est homotope à une constante $x_0 \in X$. On dit une homotopie $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ entre Id et x_0 une **contraction** de X à x_0 . Si X est une variété lisse, on dit que X est **lisse contractile** si H peut être choisie lisse.

Exemple : Soit E un espace normé, $C \subseteq E$ une convexe et $x_0 \in C$. Alors l'application $H : C \times [0, 1] \rightarrow C$ définie comme

$$H(x, t) := (1 - t) \cdot x + t \cdot x_0$$

et une homotopie entre l'identité $\text{Id} : C \rightarrow C$ et la constante $C \rightarrow \{x_0\}$. Donc, C est contractile.

2.2.8 Caractérisation des espaces contractiles

Un espace topologique X est contractile ssi toute application continue $f : Y \rightarrow X$ d'un espace topologique Y dans X est nul-homotopie.

Preuve :

$\Rightarrow$: Soit X contractile, $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ une nul-homotopie de l'identité Id_X et $f : Y \rightarrow X$ continue. Alors l'application $F : Y \times [0, 1] \rightarrow X$ définie comme $F(y, t) := H(f(y), t)$, $y \in Y$, $t \in [0, 1]$ est une nul-homotopie de f .

$\Leftarrow$: Trivial.

□

2.2.9 Lemme : Connexité des espaces contractiles

Tout espace topologique X contractile est simplement connexe.

Preuve : Soit $H : X \rightarrow X$ une homotopie entre Id_X et un point $x_0 \in X$. Soient $x, y \in X$ n'importe quels. Défini les chemins $\gamma_x, \gamma_y : [0, 1] \rightarrow X$ comme

$$\gamma_x(t) := H(x, t) \quad , \quad \gamma_y(t) := H(y, 1 - t) \quad .$$

Alors l'application $\gamma : [0, 2] \rightarrow X$ définie comme

$$\gamma(t) := \begin{cases} \gamma_x(t) & : 0 \leq t \leq 1 \\ \gamma_y(t) & : 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

et un chemin entre x et y . Par conséquence, X est connexe par arcs.

Soit $\gamma : S^1 \rightarrow X$ un chemin fermé. Alors l'application $\Gamma : S^1 \times [0, 1] \rightarrow X$ définie comme

$$\Gamma(\varphi, t) := H(\gamma(s), t) \quad , \quad \varphi \in S^1, \quad t \in [0, 1]$$

est une homotopie entre γ et le point x_0 .

□

Exemples :

- (i) L'espace $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ n'est pas contractile, car le lacet $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ défini par $\gamma(t) := e^{i2\pi t}$ n'est pas contractile.
- (ii) Par 2.4.7, la surface S^2 est simplement connexe. Cependant, elle n'est pas contractile.

2.2.10 Definition: Equivalence d'homotopie

On dit deux espaces topologiques X, Y **homotopiquement équivalents** ssi il existe deux fonctions continues $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow X$ telles que $g \circ f \sim_h \text{Id}_X$ et $f \circ g \sim_h \text{Id}_Y$. Quelquefois les applications f, g sont appelées **équivalences d'homotopie** entre X et Y .

Remarque : L'équivalence d'homotopie est une relation d'équivalence entre les espaces topologiques.

Exemple : Deux espaces topologiques homéomorphes sont homotopiquement équivalents. Le réciproque est généralement faux.

2.2.11 Definition: Rétracte

Soit X un espace topologique et $A \subseteq X$. Une **rétraction** de X dans A est une application continue $r : X \rightarrow A$ telle que $r|_A = \text{Id}_A$. Une partie $A \subseteq X$ est dit **rétracte**² de X , ssi il existe une rétraction $r : X \rightarrow A$ de X dans A . Si en plus $\text{Id}_X \sim_h (i \circ r)$ où $i : A \hookrightarrow X$ est l'inclusion de A dans X , on appelle r une **rétraction par déformation** et A une **rétracte par déformation**. On appelle toute homotopie entre Id_X et $(i \circ r)$ une **homotopie de la rétracte** A .

Remarques :

- (i) Un point $x_0 \in X$ est une rétracte par déformation ssi X est contractile à x_0 .
- (ii) Si A est une rétracte par déformation dans l'espace topologique X , alors A et X sont homotopiquement équivalentes. En fait, soit $r : X \rightarrow A$ une rétraction par déformation et $i : A \hookrightarrow X$ l'inclusion de A dans X . Alors $i \circ r \sim_h \text{Id}_X$ et $r \circ i = \text{Id}_A$.

2. Anglais : Retract.

Exemple : La surface $S^n \subseteq X := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ est une rétracte par déformation dans X , par rapport à la rétraction

$$r(x) := \frac{x}{\|x\|} \quad , \quad x \in X \quad .$$

En fait, l'application $R : X \times [0, 1] \rightarrow X$ donnée par

$$R(x, t) := t \cdot x + (1 - t) \cdot \frac{x}{\|x\|}$$

est une homotopie entre $i \circ r$ et Id_X , où $i : S^n \hookrightarrow X$ est l'inclusion de S^n dans X .

2.3 Le groupe fondamental

2.3.1 Définition: Chemin inverse

Soit X un espace topologique et $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ un chemin. On définit le **chemin inverse** $\bar{\gamma}$ de γ comme

$$\bar{\gamma} : [a, b] \rightarrow X \quad , \quad \bar{\gamma}(t) := \gamma(t \cdot a + (1 - t) \cdot b) \quad .$$

Remarques : Deux chemins sont strictement homotopes ssi leurs inverses sont strictement homotopes. On écrit donc souvent $[\gamma]_{hs}^{-1}$ au lieu de $[\bar{\gamma}]_{hs}$.

2.3.2 Définition: Composition de chemins

Soit X un espace topologique et $\gamma_i : [a_i, b_i] \rightarrow X$ deux chemins tels que $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$. Alors, on définit leur **composition** $(\gamma_1 \otimes \gamma_2) : [0, 1] \rightarrow X$ comme le chemin donné par

$$(\gamma_1 \otimes \gamma_2)(t) := \begin{cases} \gamma_1(a_1 + 2t(b_1 - a_1)) & : 0 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma_2(a_2 + (2t - 1)(b_2 - a_2)) & : 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad .$$

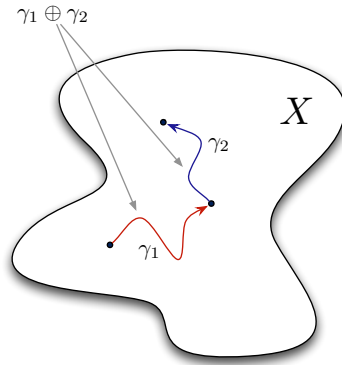


FIGURE 2: Sur la composition des chemins.

Remarques :

- (i) La composition des chemins préserve les classes d'homotopie stricte, c'est à dire, si $\gamma_1 \sim_{hs} \gamma'_1$ et $\gamma_2 \sim_{hs} \gamma'_2$, alors $\gamma_1 \otimes \gamma_2 \sim_{hs} \gamma'_1 \otimes \gamma'_2$. On peut donc écrire $[\gamma_1]_{hs} \otimes [\gamma_2]_{hs}$ au lieu de $[\gamma_1 \otimes \gamma_2]_{hs}$.
- (ii) La composition de chemins n'est pas associative ni commutative.
- (iii) L'associativité est donnée si on regarde seulement des classes d'homotopie stricte : Soient $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : [0, 1] \rightarrow X$ trois chemins tels que $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ et $\gamma_2(1) = \gamma_3(0)$. Alors l'homotopie stricte $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ donnée par

$$\Gamma(s, t) := \begin{cases} \gamma_1\left(\frac{4s}{t+1}\right) & : 0 \leq s \leq \frac{t+1}{4} \\ \gamma_2(4s - 1 - t) & : \frac{t+1}{4} \leq s \leq \frac{t+2}{4} \\ \gamma_3\left(\frac{-2-t+4s}{2-t}\right) & : \frac{t+2}{4} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

satisfait $(\gamma_1 \otimes \gamma_2) \otimes \gamma_3 = \Gamma(\cdot, 0)$ et $\gamma_1 \otimes (\gamma_2 \otimes \gamma_3) = \Gamma(\cdot, 1)$ et donc

$$(\gamma_1 \otimes \gamma_2) \otimes \gamma_3 \sim_{hs} \gamma_1 \otimes (\gamma_2 \otimes \gamma_3) .$$

En particulier

$$([\gamma_1]_{hs} \otimes [\gamma_2]_{hs}) \otimes [\gamma_3]_{hs} = [\gamma_1]_{hs} \otimes ([\gamma_2]_{hs} \otimes [\gamma_3]_{hs}) .$$

- (iv) La composition d'un chemin γ avec un lacet contractile l préserve la classe d'homotopie, c'est à dire $[\gamma]_{hs} \otimes [l]_{hs} = [\gamma]_{hs}$.
- (v) La composition d'un chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ avec son inverse $\bar{\gamma}$ donné un lacet contractile, c'est-à-dire $[\gamma]_{hs} \otimes [\gamma]_{hs}^{-1} = [\gamma(0)]_{hs}$.

2.3.3 Définition: Le groupe fondamental

Soit X un espace topologique et $x_0 \in X$ fixé. Le **groupe fondamental de X basé en x_0** , noté $\Pi_1(X, x_0)$, est l'ensemble des classes d'homotopie stricte $[\gamma]_{hs}$ (vois 2.2.1) des lacets $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ basé en x_0 . Sa loi de composition est donnée par

$$[\gamma_1]_{hs} \otimes [\gamma_2]_{hs} := [\gamma_1 \otimes \gamma_2]_{hs} \quad , \quad [\gamma_1]_{hs}, [\gamma_2]_{hs} \in \Pi_1(X, x_0) \quad (2.3.3.1)$$

avec l'élément unité le chemin constante $[x_0]_{hs}$ et l'inversion $[\gamma]_{hs}^{-1} = [\bar{\gamma}]_{hs}$

Remarques :

- (i) D'après remarque 2.3.2(i), la loi de composition (2.3.3.1) est bien défini, c'est à dire indépendant des représentants γ_1, γ_2 .
- (ii) D'après remarque 2.3.2(iii), la loi de composition (2.3.3.1) est vraiment associative. Donc, $\Pi_1(X, x_0)$ est vraiment un groupe.
- (iii) Le groupe fondamental n'est pas impérativement abélien.

2.3.4 Théorème : Invariance du groupe fondamental

Soit X un espace topologique connexe par arcs et $x_0, y_0 \in X$ n'importe quels. Alors $\Pi_1(X, x_0) \cong \Pi_1(X, y_0)$.

Preuve : Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ un chemin d'origine x_0 et d'extrémité y_0 . Alors, l'application $\Pi_1(X, x_0) \rightarrow \Pi_1(X, y_0)$ donnée par

$$[\beta]_{hs} \mapsto [\bar{\gamma} \otimes \beta \otimes \gamma]_{hs} \quad , \quad [\beta]_{hs} \in \Pi_1(X, x_0) \quad (2.3.4.1)$$

est par remarque 2.3.2(i) bien défini. De plus, elle est un isomorphisme entre les deux groupes fondamentaux.

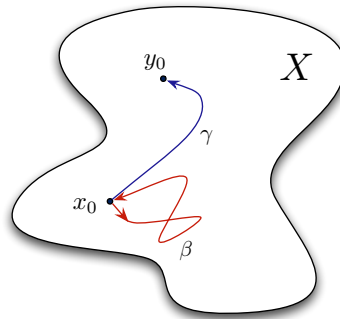


FIGURE 3: Sur l'invariance du groupe fondamental des espaces connexes par arcs.

□

Remarques :

- (i) Si X est connexe par arcs, on dénote $\Pi_1(X)$ la classe d'isomorphismes des groupes fondamentaux de X .
- (ii) L'isomorphisme (2.3.4.1), défini en utilisant un chemin γ entre x et y , est par remarque 2.3.2(i) le même pour tout chemin choisi de la classe d'homotopie $[\gamma]_{hs}$. Autrement dit, si $\gamma' \sim_{hs} \gamma$, alors

$$\bar{\gamma}' \otimes \beta \otimes \gamma' \sim_{hs} \bar{\gamma} \otimes \beta \otimes \gamma$$

pour tout lacet β basé en x_0 . Noter qu'en général, l'affirmation ne reste plus vraie si γ' et γ ne sont pas strictement homotopes.

2.3.5 Lemme : Groupes fondamentaux triviales

Soit X un espace topologique connexe par arcs et $x_0 \in X$ quelconque. Alors, il y a équivalence entre :

1. Le groupe fondamental $\Pi_1(X)$ est trivial.
2. L'espace est simplement connexe.
3. Tous chemins $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow X$ d'origine x_0 tels que $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ sont strictement homotopes.

Preuve :

1 $\Leftrightarrow$ 2 : Conséquence directe du lemme 2.2.5.

2 $\Rightarrow$ 3 : Le lacet $\gamma_0 \otimes \gamma_1^{-1}$ basé en $x := \gamma_0(0)$ est par supposition et 2.2.5 strictement homotope à x par une homotopie stricte $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$. L'application $\tilde{H} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ définie par

$$\tilde{H}(t, s) := \begin{cases} H(2t, s) & : 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ H[2t(2-s), \frac{1}{2}] & : 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \\ H(2-2t, 1-s) & : \frac{1}{2} \leq t \leq 1, 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ H[(2-2t)(2-s), \frac{1}{2}] & : \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

est une homotopie stricte entre γ_0, γ_1 (vois figure 4).

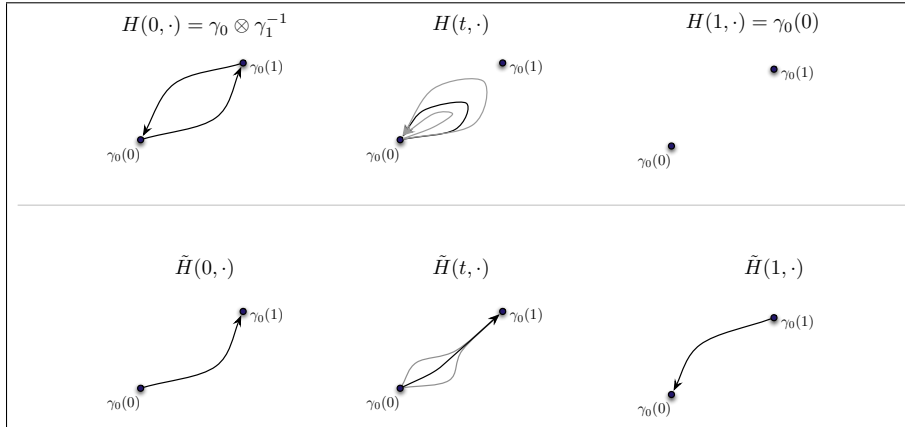


FIGURE 4: Sur la preuve de 2.3.5, direction 2 $\Rightarrow$ 3.

3 $\Rightarrow$ 2 : Par cette supposition, tout lacet est strictement homotope au point constant. Donc $\Pi_1(X, x_0) = \{0\}$. $\square$

2.3.6 Lemme : Homomorphismes entre groupes fondamentaux

Soient X, Y espaces topologiques, $\varphi : X \rightarrow Y$ continue et $x_0 \in X$. Alors, l'application

$$\varphi_* : \Pi_1(X, x_0) \rightarrow \Pi_1(Y, \varphi(x_0)) \quad , \quad [\beta]_{hs} \xrightarrow{\varphi_*} [\varphi(\beta)]_{hs}$$

est bien définie et un homomorphisme de groupes.

Remarques

- (i) Même si φ est injective, le morphisme φ_* n'est pas nécessairement injectif. Comme exemple, considérer l'inclusion $i : \mathbb{C}^\times \hookrightarrow \mathbb{C}$. Alors, même si $\Pi_1(\mathbb{C}^\times) \neq 0$, l'image $i_* [\Pi_1(\mathbb{C}^\times)]$ dans $\Pi_1(\mathbb{C})$ est trivial.

2.3.7 Lemme : Homotopies et groupes fondamentaux

Soient X_1, X_2, Y espaces topologiques, $\Phi : X_1 \times X_2 \rightarrow Y$ continue et $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$. On suppose que X_1 est simplement connexe. Soit $\Phi_2 : X_2 \times Y$ la restriction $\Phi_2(\cdot) := \Phi(x_1, \cdot)$. Alors

$$\Phi_{2*} [\Pi_1(X_2, x_2)] = \Phi_* [\Pi_1(X_1 \times X_2, (x_1, x_2))] \quad . \quad (2.3.7.1)$$

Preuve : On considère l'inclusion $i : X_2 \hookrightarrow X_1 \times X_2$ donnée par $i : x \mapsto (x_1, x)$. Alors, car $\Phi_2 = \Phi \circ i$, c'est-à-dire $\Phi_{2*} = \Phi_* \circ i_*$, il suffit à montrer que $i_* [\Pi_1(X_2, x_2)] = \Pi_1(X_1 \times X_2, (x_1, x_2))$. L'inclusion " $\subseteq$ " est triviale. Soit inversement $\gamma := (\gamma_1, \gamma_2) : [0, 1] \rightarrow X_1 \times X_2$ un lacet basé en (x_1, x_2) . Car X_1 est simplement connexe, γ_1 est strictement homotope au point x_1 . Par remarque 2.2.3(ii) γ est strictement homotope à (x_1, γ_2) . Évidemment $(x_1, \gamma_2) \in i_* [\Pi_1(X_2, x_2)]$. □

Conséquence : Si $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ est une homotopie, alors

$$H(\cdot, t_0)_* [\Pi_1(X, x_0)] = H_* [\Pi_1(X \times [0, 1], (x_0, t_0))]$$

pour tout $t_0 \in [0, 1]$ et $x_0 \in X$.

2.3.8 Théorème : Groupes fondamentaux des espaces homotopiquement équivalents

Soient X, Y espaces topologiques, $\varphi : X \rightarrow Y$ une équivalence d'homotopie et $x_0 \in X$. Alors l'homomorphisme $\varphi_* : \Pi_1(X, x_0) \rightarrow \Pi_1(Y, \varphi(x_0))$ défini dans lemme 2.3.6 est un isomorphisme.

Exemple : Soit A une rétracte par déformation dans l'espace topologique X , avec rétraction par déformation $r : X \rightarrow A$. Alors, par remarque 2.2.11(ii) et lemme 2.3.8 le groupe fondamental $\Pi_1(X, x_0)$ à $x_0 \in X$ est isomorphe au groupe fondamental $\Pi_1(A, r(x_0))$.

2.3.9 Lemme : Produits de groupes fondamentaux

Soient $(X_i)_{i \in I}$ espaces topologiques, $X := \prod_{i \in I} X_i$ leur espace topologique produit, $x_i \in X_i$ et $x := (x_i)_{i \in I}$. Alors

$$\Pi_1(X, x) \cong \prod_{i \in I} \Pi_1(X_i, x_i) \quad .$$

Preuve : L'application $\Phi : \prod_{i=1}^n \Pi_1(X_i, x_i) \rightarrow \Pi_1(X, x)$ définie par

$$\Phi : ([\gamma_i]_{hs})_{i \in I} \mapsto [(\gamma_i)_{i \in I}]_{hs}$$

est d'après remarque 2.2.3(ii) bien définie. De plus, elle est un isomorphisme des groupes. □

2.4 Le groupe fondamental de S^1 et S^2

2.4.1 Lemme : Relèvements de chemins dans S^1

Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow S^1 \subseteq \mathbb{C}$ un chemin. Alors, il existe une $\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\gamma(t) = \exp[2\pi i \cdot \tilde{\gamma}(t)]$, appelée **relèvement** de γ dans $\mathbb{R}$. Tous relèvements de γ sont égaux modulo $\mathbb{Z}$, c'est à dire, $\tilde{\gamma}' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est aussi un relèvement de γ ssi $\tilde{\gamma}' = \tilde{\gamma} + n$ pour un $n \in \mathbb{Z}$.

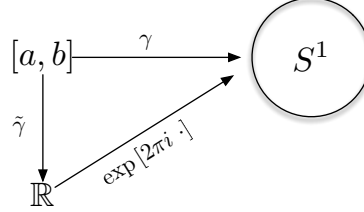


FIGURE 5: Sur les relèvements des chemins. Le diagramme commute.

Cette affirmation et sa preuve est un cas spécial du théorème 3.1.7 ci-dessous.

Preuve d'existence : On suppose que $\gamma(a) = 1$. Soit $\mathcal{E} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ donnée par $\mathcal{E}(t) := \exp(2\pi it)$. On pose $U^1 := S^1 \setminus \{1\}$ et $U^2 := S^1 \setminus \{-1\}$, alors

$$\mathcal{E}^{-1}(U^1) = \bigsqcup_{m \in \mathbb{Z}} \underbrace{(m-1, m)}_{=: I_m^1}, \quad \mathcal{E}^{-1}(U^2) = \bigsqcup_{m \in \mathbb{Z}} \underbrace{(m - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2})}_{=: I_m^2}.$$

D'après Lebesgue A.0.8, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall s \in [a, b] : \exists j \in \{1, 2\} : B_\varepsilon(s) \cap [a, b] \subseteq \gamma^{-1}(U^j).$$

On choisit $a = s_1 < s_2 < \dots < s_n = b$ tels que $|s_k - s_{k-1}| < \varepsilon \forall k$, donc pour tout $1 \leq k \leq n$ il y a un $j \in \{1, 2\}$ tel que $\gamma([s_{k-1}, s_k]) \subseteq U^j$. Pose $\tilde{\gamma}(a) := 0$ et suppose par récurrence que $\tilde{\gamma} : [a, s_{k-1}] \rightarrow \mathbb{R}$ est déjà donnée et en particulier satisfait $\gamma|_{[a, s_{k-1}]} = \mathcal{E} \circ \tilde{\gamma}|_{[a, s_{k-1}]}$.

Soit $\gamma([s_{k-1}, s_k]) \subseteq U^j$ pour quelque $j \in \{1, 2\}$, alors $\tilde{\gamma}(s_{k-1}) \in \mathcal{E}^{-1}(U^j)$ et il existe un $m \in \mathbb{Z}$ tel que $\tilde{\gamma}(s_{k-1}) \in I_m^j$. D'autre part on a $U^j = \mathcal{E}(I_m^j)$ et l'application $\mathcal{E}|_{I_m^j} : I_m^j \rightarrow U^j$ est un homéomorphisme. Donc on peut poser

$$\tilde{\gamma}|_{[s_{k-1}, s_k]} := \mathcal{E}|_{I_m^j}^{-1} \circ \gamma|_{[s_{k-1}, s_k]}. \quad (2.4.1.1)$$

Note que (2.4.1.1) préserve la valeur dernière de $\tilde{\gamma}(s_{k-1})$, donc $\tilde{\gamma}|_{[a, s_k]}$ est défini et continue. On peut continuer comme cela jusqu'à tout $\tilde{\gamma}|_{[a, b]}$ est obtenu.

Preuve d'unicité : Soient $\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux relèvements du chemin $\gamma : [a, b] \rightarrow S^1$. Alors par définition

$$\exp[2\pi i \tilde{\gamma}(t)] = \exp[2\pi i \tilde{\gamma}'(t)] \quad \forall t \in [a, b]$$

et donc l'application $\varkappa(t) := \tilde{\gamma}'(t) - \tilde{\gamma}(t)$ satisfait $\varkappa(t) \in \mathbb{Z} \quad \forall t \in [a, b]$. Mais $\varkappa : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, donc $\varkappa \equiv \text{const}$. □

2.4.2 Théorème : Relèvement d'une homotopie dans S^1

Soit $\Gamma : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow S^1 \subseteq \mathbb{C}$ une homotopie. Alors, il existe une $\tilde{\Gamma} : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\Gamma = \exp[2\pi i \cdot \tilde{\Gamma}]$, appelée **relèvement** de Γ . Tous relèvements de Γ sont égaux modulo $\mathbb{Z}$, c'est à dire, $\tilde{\Gamma}' : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est aussi un relèvement de Γ ssi $\tilde{\Gamma}' = \tilde{\Gamma} + n$ pour un $n \in \mathbb{Z}$.

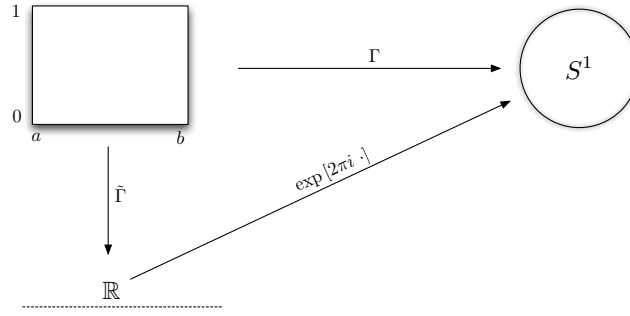


FIGURE 6: Sur le relèvement de la homotopie $\Gamma : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow S^1$.

Preuve d'existence : Sera prouvé par théorème 3.1.12.

Preuve d'unicité : Soient $\tilde{\Gamma}, \tilde{\Gamma}' : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ deux relèvements de l'homotopie $\Gamma : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow S^1$. Alors par définition

$$\exp[2\pi i \tilde{\Gamma}(s, t)] = \exp[2\pi i \tilde{\Gamma}'(s, t)] \quad \forall (s, t) \in [a, b] \times [0, 1]$$

et donc l'application $\varkappa := \tilde{\Gamma}' - \tilde{\Gamma}$ satisfait $\varkappa(s, t) \in \mathbb{Z} \quad \forall (s, t) \in [a, b] \times [0, 1]$. Mais $\varkappa : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, donc $\varkappa \equiv \text{const.}$

□

Remarques : Soit $\Gamma : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow S^1$ une homotopie avec relèvement $\tilde{\Gamma} : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Alors :

- (i) Pour tout $t \in [0, 1]$, la fonction $\tilde{\Gamma}(\cdot, t)$ est un relèvement du chemin $\Gamma(\cdot, t) : [a, b] \rightarrow S^1$.
- (ii) L'homotopie Γ est stricte ssi le relèvement $\tilde{\Gamma}$ est une homotopie stricte. Pour voir la direction “ $\Rightarrow$ ”, on peut supposer que $\Gamma(a, \cdot) \equiv 1 + 0 \cdot i$, donc $\tilde{\Gamma}(a, \cdot) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{Z}$. Mais $\tilde{\Gamma}(a, \cdot)$ est continue, donc constante. De même pour $\tilde{\Gamma}(b, \cdot)$. La direction “ $\Leftarrow$ ” est claire.

2.4.3 Définition: Degré

Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow S^1$ continue avec relèvement $\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ défini comme dans 2.4.1. Alors la valeur

$$\text{dg}(\gamma) := \tilde{\gamma}(b) - \tilde{\gamma}(a)$$

est d'après 2.4.1 bien définie et s'appelle **degré** de γ . Pour continue $f : S^1 \rightarrow S^1$ on définit le degré

$$\text{dg}(f) := \text{dg}(\underbrace{f \circ \exp(2\pi i \cdot)}_{[0, 1] \rightarrow S^1}) .$$

Pour homotopie stricte $\Gamma : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow S^1$ on pose

$$\text{dg}(\Gamma) := \text{dg}(\Gamma(\cdot, 0)) .$$

Noter que selon 2.4.2(ii) on a $\text{dg}(\Gamma) = \text{dg}(\Gamma(\cdot, t))$ pour tout $t \in [0, 1]$.

2.4.4 Lemme : Le degré comme un morphisme

Soient $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow S^1$ deux chemins tels que $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$. Alors

$$\text{dg}(\gamma_1 \otimes \gamma_2) = \text{dg}(\gamma_1) + \text{dg}(\gamma_2) .$$

et $\text{dg}(\bar{\gamma}) = -\text{dg}(\gamma)$.

Preuve : Soient $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ des relèvements des γ_1, γ_2 . On peut supposer que $\tilde{\gamma}_1(1) = \tilde{\gamma}_2(0)$. Alors, la composition $\tilde{\gamma} := \tilde{\gamma}_1 \otimes \tilde{\gamma}_2$ est un relèvement de $\gamma_1 \otimes \gamma_2$ et donc

$$\text{dg}(\gamma_1 \otimes \gamma_2) = \tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}_2(1) - \tilde{\gamma}_1(0) = \text{dg}(\gamma_1) + \text{dg}(\gamma_2) .$$

De plus, $\tilde{\gamma}_1$ est un relèvement de $\bar{\gamma}_1$ et donc

$$\text{dg}(\bar{\gamma}_1) = \tilde{\gamma}_1(1) - \tilde{\gamma}_1(0) = \tilde{\gamma}_1(0) - \tilde{\gamma}_1(1) = -\text{dg}(\gamma_1)$$

□

Conséquence : Si $\beta : [0, 1] \rightarrow S^1$ est un lacet basé en $x_0 \in S^1$ et $\gamma : [0, 1] \rightarrow S^1$ un chemin d'origine x_0 et d'extrémité $y_0 \in S^1$, alors

$$\text{dg}(\bar{\gamma} \otimes \beta \otimes \gamma) = \text{dg}(\beta) .$$

2.4.5 Lemme : Le degré sur le groupe fondamental de S^1

Soit $x_0 \in S^1$. Le degré $\text{dg} : \Pi_1(S^1, x_0) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$, donné par

$$\text{dg} : [\gamma]_{hs} \mapsto \text{dg}(\gamma) \quad , \quad [\gamma]_{hs} \in \Pi_1(S^1, x_0) \quad (2.4.5.1)$$

est bien défini et un isomorphisme de groupes.

Preuve : Par remarque 2.4.2(ii) on sait que deux chemins strictement homotopes ont même degré, donc (2.4.5.1) est bien défini. Par lemme 2.4.4, dg est un homomorphisme. Le lacet $[0, 1] \rightarrow S^1$ avec relèvement

$$\tilde{\gamma}(s) := n \cdot s + \arg(x_0)/2\pi \quad , \quad n \in \mathbb{Z} \quad ,$$

est de degré n , donc dg est surjective. Soient γ_0, γ_1 des lacets basé en x_0 avec les relèvements $\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1$ et même degré. On suppose $\tilde{\gamma}_0(0) = \tilde{\gamma}_1(0)$ (et donc $\tilde{\gamma}_0(1) = \tilde{\gamma}_1(1)$) et trouve que

$$\tilde{\Gamma}(\cdot, t) := \tilde{\gamma}_0 + t \cdot [\tilde{\gamma}_1 - \tilde{\gamma}_0]$$

est un relèvement d'une homotopie stricte entre γ_0 et γ_1 . Alors $\text{dg} : \Pi_1(S^1, x_0) \rightarrow \mathbb{Z}$ est bijective.

□

2.4.6 Corollaire : Le groupe fondamental de S^1

Par 2.4.5, le groupe fondamental $\Pi_1(S^1)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$. D'après la conséquence de 2.4.4, l'isomorphisme (2.3.4.1) qui connecte deux n'importe quel $\Pi_1(S^1, x)$, $\Pi_1(S^1, y)$, préserve le degré, c'est-à-dire le diagramme ci-dessous commute.

$$\begin{array}{ccc} \Pi_1(S^1, x) & \xrightarrow{\text{ad}_\gamma} & \Pi_1(S^1, y) \\ & \searrow \text{dg} & \swarrow \text{dg} \\ & \mathbb{Z} & \end{array}$$

FIGURE 7: Sur la préservation du degré sur S^1 par transport entre groupes fondamentaux basés en deux points x, y , reliés par un chemin γ . Le diagramme commute.

Conséquence : Le 2-tore possède le groupe fondamental $\Pi_1(S^1 \times S^1) \cong \Pi_1(S^1) \times \Pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

2.4.7 Lemme : Le groupe fondamental de S^2

Le surface S^2 est simplement connexe. Par conséquence, d'après 2.3.5 son groupe fondamental $\Pi_1(S^2)$ est trivial. En fait, l'assertion reste vrai si on supprime un point de S^2 .

Preuve : Bien sûr S^2 est connexe par arcs. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow S^2$ un chemin et $x_0 \in S^2 \setminus \gamma([0, 1])$. Alors, il existe un homéomorphisme $f : S^2 \setminus x_0 \rightarrow \mathbb{C}$ (projection stéréographique). Car $S^2 \setminus x_0$ est simplement connexe, $f \circ \gamma$ et donc γ est homotope à un point. Alors S^2 est aussi simplement connexe. $\square$

2.4.8 Lemme : Le groupe fondamental de S^2 avec deux trous

Les groupes fondamentaux du cylindre infini $\mathbb{R} \times S^1$, de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, du disque ouvert avec un trou $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ et de S^2 avec deux trous, sont tous isomorphes à $(\mathbb{Z}, +)$.

Preuve : Les quatre espaces sont homéomorphes, donc possèdent le même groupe fondamental. Par 2.3.9 et 2.4.6 on a $\Pi_1(\mathbb{R} \times S^1) \cong \Pi_1(\mathbb{R}) \times \Pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

$$\mathbb{R} \times S^1 \quad \simeq \quad \{0 < |z| < 1\} \subseteq \mathbb{C} \quad \simeq \quad S^2 \setminus \{x, y\}$$

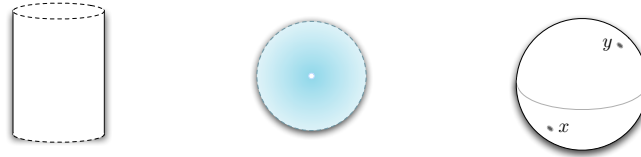


FIGURE 8: Sur lemme 2.4.8 : Tous les espaces topologiques montrés sont homéomorphes et possèdent le groupe fondamental $\mathbb{Z}$. $\square$

2.4.9 Corollaire : Théorème du point fixe de Brouwer

Toute fonction continue $f : B^2 \rightarrow B^2$ sur la boule unité fermée de $\mathbb{R}^2$ admet au moins un point fixe.

Preuve : Supposons que f n'a pas de points fixes, c'est à dire $f(x) \neq x$ pour tout $x \in B^2$. On va construire une rétraction par déformation $r : B^2 \rightarrow S^1 = \partial B^2$. Pour $x \in B^2$ et $t \in [0, 1]$ pose $H(x, t) := t \cdot g(x) + (1 - t) \cdot x$, où $g(x) \in S^1$ est l'intersection unique de la prolongation (au droite) du segment $[f(x), x]$ jusqu'à un point du cercle S^1 . Alors, car $g : B^2 \rightarrow S^1$ est bien définie et continue, constante sur S^1 , on a trouvé une homotopie entre Id_{B^2} et la rétraction $H(\cdot, 1) : B^2 \rightarrow S^1$.

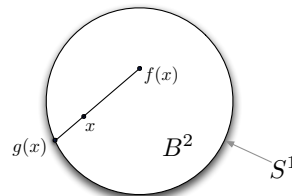


FIGURE 9: Sur la preuve du théorème du point fixe de Brouwer.

Donc S^1 est une rétracte par déformation de B^2 et par 2.3.8 il faut $\Pi_1(B^2) \cong \Pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$. Mais B^2 est simplement connexe, donc on a trouvé une contradiction !

□

3 Revêtements

3.1 Revêtements et relèvements

3.1.1 Définition: Revêtement

Soient C, X espaces topologiques et $p : C \rightarrow X$ continue, surjective. Alors, p s'appelle **revêtement**³ de la **base** X par l'**espace total** (ou **espace étalé**) C , ssi pour tout $x \in X$ il existe une ouverte $V \ni x$ telle que $p^{-1}(V) = \bigsqcup_{i \in I} U_i$ est une union des ouverts U_i disjointes et $p|_{U_i} : U_i \rightarrow V$ est un homéomorphisme $\forall i \in I$. Souvent on dit aussi la paire (C, p) revêtement de X .

Les ouverts U_i s'appellent **feuilles**⁴ sur le **trivialisant**⁵ V . On appelle **fibres**⁶ **au-dessus du point** x le sous-espace (discret) $p^{-1}(x) \subseteq C$.

Si on peut prendre $V = X$, on dit le revêtement **trivial**.

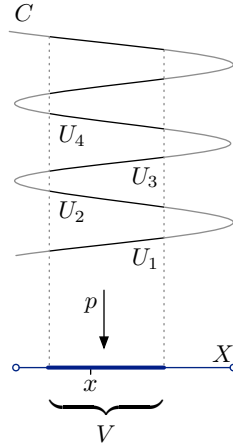


FIGURE 10: Revêtement d'un intervalle réel ouvert par projection p d'une courbe C dans $\mathbb{R}^2$.

Remarques :

- (i) Soit V un trivialisant du revêtement $p : C \rightarrow X$. Alors, tout sous-ouvert $\emptyset \neq V' \subseteq V$ est aussi un trivialisant.
- (ii) De (i) on déduit que les ouverts trivialisants de X forment une base de sa topologie.
- (iii) Soit $p : C \rightarrow X$ un revêtement de X , $X_0 \subseteq X$ n'importe quel et $C_0 := p^{-1}(X_0)$. Alors, la restriction $p|_{C_0} : C_0 \rightarrow X_0$ est un revêtement de X_0 .

Exemples :

- (i) $\exp[2\pi i \cdot] : \mathbb{R} \rightarrow S^1 \subseteq \mathbb{C}$ est un revêtement de S^1 .
- (ii) $(z \mapsto z^n) : S^1 \rightarrow S^1$ est un revêtement de S^1 .
- (iii) Si X est un espace topologique et F un espace topologique discret, alors la projection $p : F \times X \rightarrow X$ est un revêtement trivial de X par $F \times X$.
- (iv) L'application $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ est un revêtement.
- (v) L'application $\mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times S^1$ donnée par $(x, y) \mapsto (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$ est un revêtement.
- (vi) Soit G un groupe qui agit via homéomorphismes sur l'espace topologique X . Alors l'opération $G \times X \rightarrow X$ est en fait un revêtement de X par $G \times X$, où G est muni de la topologie discrète.
- (vii) Si G est un groupe qui agit proprement discontinûment via homéomorphismes sur l'espace topologique X , alors l'application quotient $X \rightarrow X/G$ est un revêtement de X/G . Voir 3.4.5 pour plus d'informations.

3. Anglais : Covering.

4. Anglais : Sheets.

5. Anglais : Evenly-covered neighborhood.

6. Anglais : Fiber.

3.1.2 Définition: Revêtements équivalents

Soit Y un espace topologique. Alors, deux revêtements (C_0, p_0) , (C_1, p_1) de Y sont dit **équivalents** ssi il existe un homéomorphisme $h : C_0 \rightarrow C_1$ tel que $p_0 = p_1 \circ h$. En ce cas, on note $(C_0, p_0) \cong (C_1, p_1)$.

Remarque : L'équivalence de revêtements de Y est une relation d'équivalence.

3.1.3 Lemme sur revêtements et rétractes

Soit Y un espace topologique et (C, p) un revêtement de Y . Soit $Y_0 \subseteq Y$ tel que $C_0 := p^{-1}(Y_0)$ est une rétracte de C par déformation (vois 2.2.11). On suppose qu'il existe une homotopie $\tilde{H} : C \times [0, 1] \rightarrow C$ de la rétracte C_0 satisfaisant $p[\tilde{H}(c_1, \cdot)] = p[\tilde{H}(c_2, \cdot)]$ pour tous $c_1, c_2 \in C$ dans le même fibre. Alors, Y_0 est une rétracte de Y par déformation.

Preuve : Pour $t \in [0, 1]$ et $y \in Y$ pose $H(y, t) := p[\tilde{H}(c, t)]$ où $c \in p^{-1}(y)$ est n'importe quel. Alors, par hypothèse l'application $H : Y \times [0, 1] \rightarrow Y$ est bien définie. On va montrer que H est une homotopie de la rétracte Y_0 . Évidemment $H(\cdot, 0) = \text{Id}_Y$. De plus, $H(Y, 1) \subseteq Y_0$ et $H(y_0, 1) = y_0$ pour tout $y_0 \in Y_0$. Il reste donc à montrer que H est continue. Par A.0.10 il suffit de montrer que $H|_{V \times [0, 1]} : V \times [0, 1] \rightarrow C$ est continue pour tout ouvert trivialisant $V \subseteq Y$. En fait, si $U \subseteq C$ est un feuillet de V par rapport à p , alors par définition $H|_{V \times [0, 1]}$ possède la forme

$$H|_{V \times [0, 1]} = p \circ \tilde{H} \left[p|_U^{-1}(\cdot), \cdot \right]$$

et est évidemment continue. □

3.1.4 Lemme : Topologie des espaces étales

Soit Y un espace topologique et (C, p) un revêtement de Y . Alors :

1. Y est localement connexe ssi C est également.
2. Y est localement connexe par arcs ssi C est également.

Preuve : Suit du fait que $p : C \rightarrow Y$ est localement un homéomorphisme. □

3.1.5 Définition: Relèvement des applications

Soient X, Y espaces topologiques, (C, p) un revêtement de Y et $f : X \rightarrow Y$ continue. Si $\tilde{f} : X \rightarrow C$ est continue telle que $f = p \circ \tilde{f}$, alors $\tilde{f}$ est dit un **relèvement**⁷ de f par p . On dit f la **projection** de $\tilde{f}$ sur Y . Si $x_0 \in X$, $c_0 \in C$ sont points tels que $\tilde{f}(x_0) = c_0$, on note souvent $\tilde{f} : (X, x_0) \rightarrow (C, c_0)$.

3.1.6 Lemme : Unicité des relèvements des applications

Soient X, Y espaces topologiques, X connexe et (C, p) un revêtement de Y . Soient $f_0, f_1 : X \rightarrow C$ continues tels que $p \circ f_0 = p \circ f_1$ et $f_0(x_0) = f_1(x_0)$ pour quelqu'un $x_0 \in X$. Alors $f_0 = f_1$.

7. Anglais : Lift.

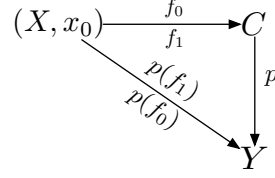


FIGURE 11: Sur l'unicité des relèvements. Si $f_1, f_2 : (X, x_0) \rightarrow (C, c_0)$ relèvent la même application $X \rightarrow Y$, alors $f_1 = f_2$.

Preuve : Soit $\mathcal{X} := \{x \in X \mid f_0(x) = f_1(x)\}$ et $x \in \mathcal{X}$ n'importe quel. Soit $V \subseteq Y$ un voisinage trivialisant de $p(f_0(x))$ et $U \subseteq C$ un feuillet de V contenant $f_0(x)$. Alors, pour $x' \in f_0^{-1}(U) \cap f_1^{-1}(U)$ on a $p|_U(f_0(x')) = p|_U(f_1(x'))$ et donc $f_0(x') = f_1(x')$ car $p|_U : U \rightarrow V$ est bijective. Alors

$$x \in \overbrace{f_0^{-1}(U) \cap f_1^{-1}(U)}^{\text{ouvert}} \subseteq \mathcal{X}$$

et par conséquent, $\mathcal{X}$ est ouvert. D'autre part, soit $x \in \mathcal{X}^c := X \setminus \mathcal{X}$ et V un trivialisant de $p(f_0(x)) = p(f_1(x))$ et U_0, U_1 des feuillets de V qui contenant $f_0(x)$ et $f_1(x)$ respectivement. Alors car $f_1(x) \neq f_2(x)$, par la même argumentation comme ci-dessus, il faut $U_1 \neq U_2$ et donc $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Par conséquent

$$x \in f_0^{-1}(U_0) \cap f_1^{-1}(U_1) \subseteq X \setminus \mathcal{X},$$

donc $\mathcal{X}^c$ est ouvert aussi. Car $x_0 \in \mathcal{X} \neq \emptyset$ et $X = \mathcal{X} \cup \mathcal{X}^c$ est connexe, alors $\mathcal{X} = X$. □

3.1.7 Théorème : Relèvements des chemins

Soit Y un espace topologique et (C, p) un revêtement de Y . Soit $c_0 \in C$ et $\gamma : [a, b] \rightarrow Y$ un chemin d'origine $p(c_0)$. Alors, il existe un chemin unique $\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow C$ d'origine c_0 et tel que $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$. On appelle $\tilde{\gamma}$ le **relèvement** de γ par p d'origine c_0 .

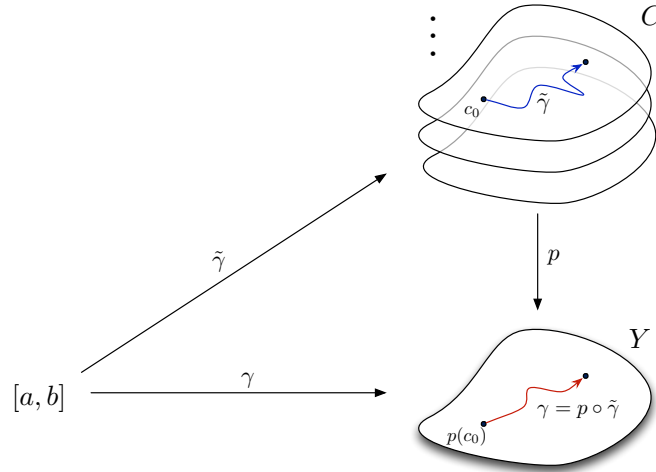


FIGURE 12: Sur le relèvement $\tilde{\gamma}$ d'un chemin γ par un revêtement (C, p) . L'origine du relèvement détermine tout le relèvement. Le diagramme commute.

Preuve : L'unicité suit de lemme 3.1.6, donc il suffit de montrer l'existence. Soit $(V^j)_{j \in J}$ un recouvrement de Y par ouverts trivialisants. Pour tout $j \in J$ soient $(U_i^j)_{i \in I^j}$ les feuillets de V_i , c.a.d.

$$p^{-1}(V^j) = \bigsqcup_{i \in I^j} \underbrace{U_i^j}_{\text{ouvert}} .$$

Car $\{\gamma^{-1}(V^j) \mid j \in J\}$ est un recouvrement ouvert de $[a, b]$, d'après Lebesgue A.0.8, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall s \in [a, b] : \exists j \in J : B_\varepsilon(s) \cap [a, b] \subseteq \gamma^{-1}(V^j) .$$

On choisit $a = s_1 < s_2 < \dots < s_n = b$ tels que $|s_k - s_{k-1}| < \varepsilon \forall k$, donc pour tout $1 \leq k \leq n$ il y a un $j \in J$ tel que $\gamma([s_{k-1}, s_k]) \subseteq V^j$. Pose $\tilde{\gamma}(a) := c_0$ et suppose par récurrence que $\tilde{\gamma} : [a, s_{k-1}] \rightarrow \mathbb{R}$ est déjà donnée et en particulier satisfait $\gamma|_{[a, s_{k-1}]} = p \circ \tilde{\gamma}|_{[a, s_{k-1}]}$.

Soit $\gamma([s_{k-1}, s_k]) \subseteq V^j$ pour quelqu'un $j \in J$, alors $\tilde{\gamma}(s_{k-1}) \in p^{-1}(V^j)$ et il existe un $i \in I^j$ tel que $\tilde{\gamma}(s_{k-1}) \in U_i^j$. D'autre part on a $V^j = p(U_i^j)$ et l'application $p|_{U_i^j} : U_i^j \rightarrow V^j$ est un homéomorphisme. Donc on peut poser

$$\tilde{\gamma}|_{[s_{k-1}, s_k]} := p|_{U_i^j}^{-1} \circ \gamma|_{[s_{k-1}, s_k]} . \quad (3.1.7.1)$$

Noter que (3.1.7.1) préserve la valeur dernière de $\tilde{\gamma}(s_{k-1})$, donc $\tilde{\gamma}|_{[a, s_k]}$ est définie et continue. On peut continuer comme cela jusqu'à tout $\tilde{\gamma}|_{[a, b]}$ est obtenu. $\square$

Interprétation : Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow Y$ un chemin tel que $\gamma(0) = y_0$. Alors, le fibre $p^{-1}(y_0) \subseteq C$ est en bijection avec les relèvements $\tilde{\gamma}$ de γ via l'application $\tilde{\gamma} \mapsto \tilde{\gamma}(0)$.

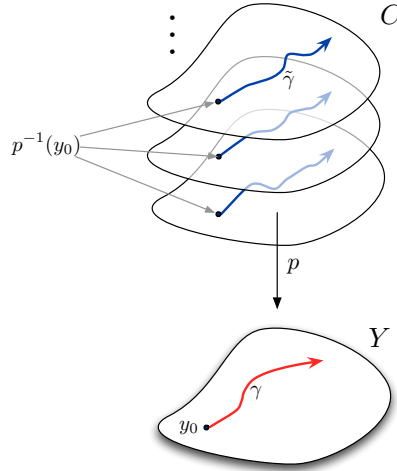


FIGURE 13: Sur la bijection entre fibres et relèvements de chemins.

3.1.8 Corollaire sur la cardinalité des fibres

Soit Y un espace topologique, (C, p) un revêtement de Y et $y_0, y_1 \in Y$ reliés. Alors, les deux fibres $p^{-1}(y_0)$, $p^{-1}(y_1)$ ont même cardinal.

Preuve : Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow Y$ un chemin d'origine y_0 et extrémité y_1 . Les relèvements de γ sont en bijection avec les relèvements de l'inverse $\bar{\gamma}$. D'après 3.1.7, les fibres $p^{-1}(y_0)$ et $p^{-1}(y_1)$ sont en bijection avec les relèvements de γ et $\bar{\gamma}$ respectivement, donc ont même cardinal. En fait, les points de $p^{-1}(y_0)$ sont liés un à un aux points de $p^{-1}(y_1)$ via les relèvements de γ . $\square$

3.1.9 Définition: Fibration

Soient C, X, Y espaces topologiques et $p : C \rightarrow Y$ continue, telle que :

Pour homotopie $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ et continue $\tilde{h}_0 : X \rightarrow C$ telle que $H(\cdot, 0) = p \circ \tilde{h}_0$, il existe continue $\tilde{H} : X \times [0, 1] \rightarrow C$ telle que $\tilde{H}(\cdot, 0) = \tilde{h}_0$ et $H = p \circ \tilde{H}$.

Alors, on dit que p satisfait la propriété de **relèvements des homotopies par rapport à X** . Si p satisfait cette propriété pour tout espace topologique X , on appelle p une **fibration** ou (C, p) un **espace de fibre de Hurewicz**. Pour $y \in Y$ on dit $p^{-1}(y)$ le **fibre** au dessus de y par rapport à p . On appelle l'espace Y la **base** et C l'**espace total** de la fibration.

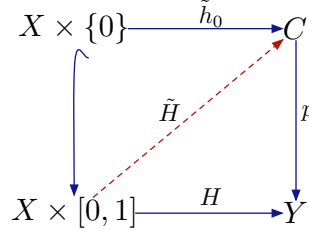


FIGURE 14: Sur la définition d'une fibration $p : C \rightarrow Y$. Si le diagramme bleu commute, alors il existe un $\tilde{H}$ tel que tout le diagramme commute.

Remarques

- (i) L'existence d'un **relèvement** $\tilde{H}$ dit rien sur son unicité.
- (ii) L'existence du relèvement $\tilde{h}_0 : X \rightarrow C$ de $H(0, \cdot)$ est en général indispensable pour l'existence d'un relèvement $\tilde{H}$ de H .

Exemples

- (i) Soient Y, F espaces topologiques n'importe lesquels. Alors, la projection $P_Y : F \times Y \rightarrow Y$ est une fibration. En effet, si X, H et $\tilde{h}_0$ sont comme dans 3.1.9, alors le relèvement

$$\tilde{H} : X \times [0, 1] \rightarrow F \times Y, \quad \tilde{H}(x, t) := [P_F \tilde{h}_0(x), H(x, t)]$$

satisfait les affirmations, où P_F est la projection $F \times Y \rightarrow F$.

- (ii) Par théorème 3.1.11, tout revêtement est une fibration.

3.1.10 Lemme sur trivialisants et homotopies

Soient X, Y espaces topologiques, (C, p) un revêtement de Y et $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ une homotopie. Alors, pour tout $x \in X$ il existe un ouvert $x \in W \subseteq X$ et valeurs $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ tels que, pour tout $1 \leq k \leq n$ il existe un trivialisant $V \subseteq Y$ de p tel que $H(W \times [t_{k-1}, t_k]) \subseteq V$.

Preuve : Soit $(V_i)_{i \in I}$ un recouvrement de Y par trivialisants. Alors, les $U_i := H^{-1}(V_i)$, $i \in I$ forment un recouvrement de $X \times [0, 1]$. Par A.0.11 et remarque 3.1.1(i) on peut trouver un recouvrement $(\tilde{U}_j)_{j \in J}$ de $X \times [0, 1]$ tel que :

- Les $\tilde{U}_j$ sont de la forme $\tilde{U}_j = W_j \times T_j$, où $W_j \in X$, $T_j \in [0, 1]$ sont ouverts.
- Tout $H(\tilde{U}_j)$ est contenu dans un trivialisant.

Soient $\pi_I : X \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ et $\pi_X : X \times [0, 1] \rightarrow X$ les projections dans $[0, 1]$ et X respectivement. Soit $x \in X$ n'importe lequel et considère seulement les $\tilde{U}_j$ qui contiennent au moins un point de $\{x\} \times [0, 1]$. Par A.0.8 on peut choisir $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \in [0, 1]$, $B_\varepsilon(t)$ est contenu dans un $\pi_I(\tilde{U}_j)$. En particulier, on peut trouver $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ tels que $[t_{k-1}, t_k] \subseteq \pi_I(\tilde{U}_{j_k})$ pour quelque'un $\tilde{U}_{j_k}$. Pose $W := \bigcap_{k=1}^n \pi_X(\tilde{U}_{j_k})$, alors $W \ni x$ est ouvert et $W \times [t_{k-1}, t_k]$ est contenu dans $\tilde{U}_{j_k}$. □

3.1.11 Théorème : Relèvement des homotopies

Soient X, Y espaces topologiques et (C, p) un revêtement de Y . Soit $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ une homotopie et $\tilde{h}_0 : X \rightarrow C$ continue telle que $H(\cdot, 0) = p \circ \tilde{h}_0$. Alors, il existe un relèvement unique $\tilde{H} : X \times [0, 1] \rightarrow C$ de H tel que $\tilde{H}(\cdot, 0) = \tilde{h}_0$. En particulier, $p : C \rightarrow Y$ est une fibration.

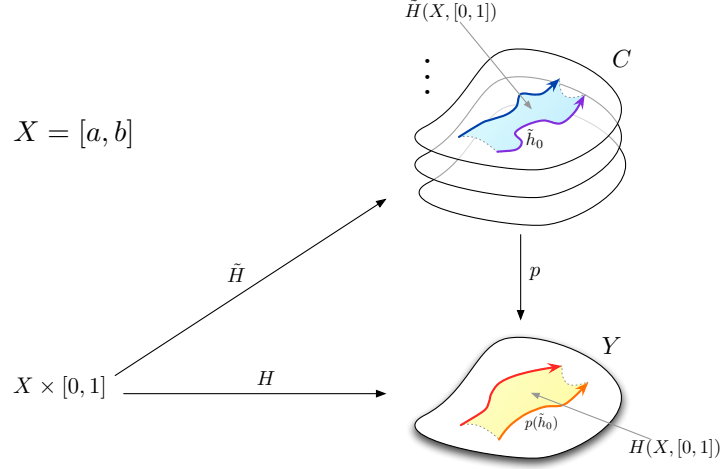


FIGURE 15: Sur les relèvements des homotopies par revêtements. Ici, montré le relèvement d'une homotopie H de chemins. Le diagramme commute.

Preuve : Unicité suit de lemme 3.1.6 car tout $\tilde{H}(x, \cdot)$ est un relèvement du chemin $H(x, \cdot)$ qui satisfait à la condition $\tilde{H}(x, 0) = \tilde{h}_0(x)$.

L'existence (sans continuité) suit de théorème 3.1.7 sur relèvements des chemins : Pour chaque $x \in X$, pose $\tilde{H}(x, \cdot) : [0, 1] \rightarrow C$ comme le relèvement du chemin $H(x, \cdot) : [0, 1] \rightarrow Y$ qui satisfait $\tilde{H}(x, 0) = \tilde{h}_0(x)$. Donc il reste à montrer la continuité de cette construction.

Soit $(V^j)_{j \in J}$ un recouvrement de Y par ouverts trivialisants. Pour tout $j \in J$ soient $(U_i^j)_{i \in I^j}$ les feuilletts sur V_i , c.a.d.

$$p^{-1}(V^j) = \bigsqcup_{i \in I^j} \underbrace{U_i^j}_{\text{ouvert}} .$$

Soit $x \in X$ n'importe quel. On va démontrer que $\tilde{H}$ est continue sur $W_x \times [0, 1]$ pour quelque'un voisinage $W_x \subseteq X$ de x .

- Par 3.1.10 on peut trouver un voisinage $W_x \ni x$ et valeurs $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ tels que

$$\forall 1 \leq k \leq n : \exists j \in J : H(W_x, [t_{k-1}, t_k]) \subseteq V_j .$$

- Pose $\tilde{h}|_{W_x \times \{0\}} := \tilde{h}_0|_{W_x}$.
- Suppose que $\tilde{h}$ est donnée pour $W_x \times [0, t_{k-1}]$ et satisfait

$$p \circ \tilde{h}|_{W_x \times [0, t_{k-1}]} = H|_{W_x \times [0, t_{k-1}]} .$$

Suit $j \in J$ tel que $H(W_x, [t_{k-1}, t_k]) \subseteq V^j$, alors $\tilde{h}(x, t_{k-1}) \in p^{-1}(V^j)$. Soit U_i^j le feuillet de V^j qui contient $\tilde{h}(x, t_{k-1})$. On peut suppose⁸ que $\tilde{h}(W_x \times \{t_{k-1}\}) \subseteq U_i^j$. Alors $p|_{U_i^j} : U_i^j \rightarrow V^j$ est un homéomorphisme et on peut pose

$$\tilde{h}|_{W_x \times [t_{k-1}, t_k]} := p|_{U_i^j}^{-1} \circ H|_{W_x \times [t_{k-1}, t_k]} .$$

Comme ça, on a prolongé $\tilde{h}|_{W_x \times [0, t_{k-1}]}$ au $W_x \times [0, t_k]$ continûment, où le voisinage W_x est peut être plus petit que l'original.

$$H(W_x, [t_{k-1}, t_k]) \subseteq V$$

8. Sinon remplace W_x par $W_x \cap \pi_X(\tilde{h}|_{W_x \times \{t_{k-1}\}}^{-1}(U_i^j))$ où $\pi_X : X \times [0, 1] \rightarrow X$ est la projection dans X . Alors W_x est encore ouvert et contient x .

- En continuant comme ça, on construit $\tilde{h} : W_x \times [0, 1] \rightarrow C$ comme relèvement de $H|_{W_x \times [0, 1]}$ qui satisfait $\tilde{h}|_{W_x \times \{0\}} = \tilde{h}_0|_{W_x}$.

Par 3.1.6 le relèvement $\tilde{h}(x, \cdot)$ du chemin $H(x, \cdot)$ avec $\tilde{h}(x, 0) = \tilde{h}_0(x)$ est unique, donc $\tilde{H}(x, \cdot) = \tilde{h}(x, \cdot)$ pour tout $x \in W_x$. Autrement dit $\tilde{h}|_{W_x \times [0, 1]} = \tilde{H}|_{W_x \times [0, 1]}$, donc $\tilde{H}$ est continue sur $W_x \times [0, 1]$. Donc, on a trouvé un recouvrement ouvert $(W_x \times [0, 1])_{x \in X}$ de $X \times [0, 1]$ tel que $\tilde{H}|_{W_x \times [0, 1]}$ est toujours continue. D'après A.0.10, ça implique la continuité de $\tilde{H} : X \times [0, 1] \rightarrow Y$. $\square$

3.1.12 Corollaire : Relèvements des homotopies de chemins

Soit (C, p) un revêtement de l'espace topologique Y et $H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow Y$ une homotopie de chemins. Soit $c_0 \in C$ tel que $p(c_0) = H(a, 0)$. Alors, il existe un relèvement $\tilde{H} : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow C$ de H unique tel que $\tilde{H}(a, 0) = c_0$. Si de plus H est stricte, alors $\tilde{H}$ est aussi stricte.

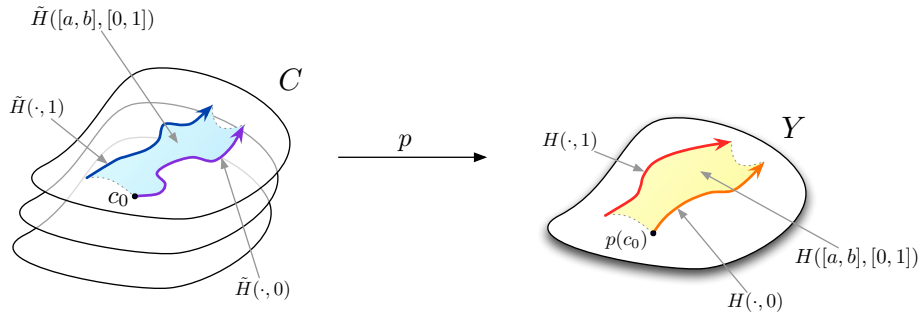


FIGURE 16: Sur les relèvements des homotopies de chemins.

Preuve : L'unicité suit de lemme 3.1.6. Pose $\tilde{h}_0 : [a, b] \rightarrow C$ comme le relèvement du chemin $H(\cdot, 0) : [a, b] \rightarrow Y$ qui satisfait $\tilde{h}_0(a) = c_0$ (vois 3.1.7). Par théorème 3.1.11, il existe un relèvement $\tilde{H} : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow C$ de H tel que $\tilde{H}(\cdot, 0) = \tilde{h}_0$.

Soit de plus H stricte, alors le chemin $H(a, \cdot)$ est un point constant. Donc, il permet un unique relèvement $\tilde{h} : [0, 1] \rightarrow C$ qui satisfait $\tilde{h}(0) = \tilde{H}(a, 0)$, à savoir exactement $\tilde{H}(a, \cdot)$ et le constant $\tilde{h} \equiv \tilde{H}(a, 0)$, donc $\tilde{H}(a, \cdot) \equiv \tilde{H}(a, 0)$. De même pour $\tilde{H}(b, \cdot)$. Bilan, $\tilde{H}$ est aussi stricte. $\square$

3.2 Action du groupe fondamental sur le fibre

3.2.1 Théorème : Revêtements comme homomorphismes injectifs

Soit Y un espace topologique, (C, p) un revêtement de Y et $c_0 \in C$. Alors :

1. Pour deux chemins $\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1 : [0, 1] \rightarrow C$ de même origine tels que $p(\tilde{\gamma}_0) \sim_{hs} p(\tilde{\gamma}_1)$, il faut $\tilde{\gamma}_0 \sim_{hs} \tilde{\gamma}_1$.
2. L'homomorphisme $p_* : \Pi_1(C, c_0) \rightarrow \Pi_1(Y, p(c_0))$ induit par p et défini dans 2.3.6 est injectif.
3. Soit $\tilde{\gamma}_0 : [0, 1] \rightarrow C$ un chemin tel que $p(\tilde{\gamma}_0) \sim_{hs} \gamma_1$ pour un autre chemin $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow Y$ quelconque. Alors, il existe un chemin $\tilde{\gamma}_1 \in [\tilde{\gamma}_0]_{hs}$ tel que $p(\tilde{\gamma}_1) = \gamma_1$. Par conséquence :

$$[p(\tilde{\gamma}_0)]_{hs} = p([\tilde{\gamma}_0]_{hs}) \quad .$$

Preuve :

1. Par 3.1.12 tout homotopie stricte $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow Y$ entre les chemins $p(\tilde{\gamma}_0)$ et $p(\tilde{\gamma}_1)$ se relève à une homotopie stricte $\tilde{H} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow C$ qui satisfait $\tilde{H}(0, 0) = \tilde{\gamma}_0(0)$. Par unicité, le relèvement $\tilde{H}(\cdot, 0)$ de

$p(\tilde{\gamma}_0)$ est égal $\tilde{\gamma}_0$. Car $\tilde{H}$ est stricte, on a aussi $\tilde{H}(0, 1) = \tilde{H}(0, 0) = \tilde{\gamma}_0(0) = \tilde{\gamma}_1(0)$. Donc par unicité on aussi $\tilde{H}(\cdot, 1) = \tilde{\gamma}_1$. Donc, $\tilde{H}$ est une homotopie stricte entre $\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1$.

2. Suit de proposition (1).

3. Soit $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow Y$ une homotopie stricte entre $p(\tilde{\gamma}_0)$ et γ_1 . Alors d'après 3.1.12, elle se relève à une homotopie stricte $\tilde{H} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow C$ qui satisfait $\tilde{H}(0, 0) = \tilde{\gamma}_0(0)$. Pose $\tilde{\gamma}_1 := \tilde{H}(\cdot, 1)$, alors $\tilde{\gamma}_0(0) = \tilde{\gamma}_1(0)$ et $p(\tilde{\gamma}_0) \sim_{hs} p(\tilde{\gamma}_1)$. Par assertion (1) il faut $\tilde{\gamma}_0 \sim_{hs} \tilde{\gamma}_1$.

□

Remarques :

1. Tout lacet $\tilde{l} : [0, 1] \rightarrow C$ basé en $c_0 \in C$ est envoyé à un lacet $p(\tilde{l})$ dans Y . Mais le réciproque est généralement faux : Dans la plupart des cas, il existe lacets dans Y basés en $p(c_0)$, dont les relèves ne sont pas lacets dans C . Comme exemple, considère le revêtement $c \mapsto \exp[2\pi i \cdot c]$ de S^1 par $\mathbb{R}$ et le chemin $\gamma(s) := \exp[2\pi i \cdot s]$, $s \in [0, 1]$.
2. Soient $\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1 : [0, 1] \rightarrow C$ chemins d'origine $c_0 \in C$ tels que leurs projections $p(\tilde{\gamma}_0), p(\tilde{\gamma}_1)$ sont lacets strictement homotopes basés en $p(c_0)$. Alors, d'après affirmation (2), il faut que $\tilde{\gamma}_0 \sim_{hs} \tilde{\gamma}_1$ et en particulier $\tilde{\gamma}_0(1) = \tilde{\gamma}_1(1) \in p^{-1}(p(c_0))$.
3. Affirmation (3) dit que, si $[\gamma]_{hs} \in \Pi_1(Y, p(c_0))$ et $[\tilde{\gamma}]_{hs} \in \Pi_1(C, c_0)$ sont tels que $[\gamma]_{hs} = p_*[\tilde{\gamma}]_{hs}$, on peut supposer que $\gamma = p(\tilde{\gamma})$.

3.2.2 Définition: Action de monodromie du groupe fondamental sur fibres

Soit Y un espace topologique et (C, p) un revêtement de Y . Soit $y_0 \in Y$, $c_0 \in p^{-1}(y_0)$, $\gamma : [0, 1] \rightarrow Y$ un chemin d'origine y_0 et $[\gamma]_{hs}$ sa classe d'homotopie stricte. Soit $\tilde{\gamma}$ son relèvement unique dans C d'origine c_0 . On note

$$c_0 \cdot [\gamma]_{hs} := \tilde{\gamma}(1) . \quad (3.2.2.1)$$

D'après remarque 3.2.1(2), (3.2.2.1) est bien défini, c'est à dire $c \cdot [\gamma]_{hs}$ ne dépend pas du représentant γ de la classe d'homotopie stricte $[\gamma]_{hs}$. Car c_0 et $c_0 \cdot [\gamma]$ sont dans le même fibre ssi $[\gamma]_{hs} \in \Pi_1(Y, y_0)$, on a défini une application

$$p^{-1}(y_0) \times \Pi_1(Y, y_0) \rightarrow p^{-1}(y_0) \quad , \quad (c, [\gamma]_{hs}) \mapsto c \cdot [\gamma]_{hs}$$

sur le produit du fibre $p^{-1}(y_0)$ et le groupe fondamental $\Pi_1(Y, y_0)$.

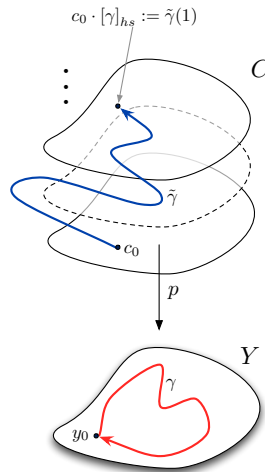


FIGURE 17: Sur la définition de l'action de monodromie de $\Pi_1(Y, y_0)$ sur le fibre $p^{-1}(y_0)$.

Propriétés :

- a) Pour tout $c \in p^{-1}(y_0)$ on a $c \cdot [\gamma]_{hs} = c$.

Preuve : Évident.

- b) Pour $[\beta]_{hs}, [\gamma]_{hs} \in \Pi_1(Y, y_0)$ on a

$$(c \cdot [\beta]_{hs}) \cdot [\gamma]_{hs} = c \cdot ([\beta]_{hs} \otimes [\gamma]_{hs}) \quad .$$

Preuve : Soient $\tilde{\beta}, \tilde{\gamma}$ les relèvements de β et γ d'origines c et $\tilde{\beta}(1) = c \cdot [\beta]_{hs}$ respectivement. Alors, $\tilde{\beta} \otimes \tilde{\gamma}$ est le relèvement de $\beta \otimes \gamma$ d'origine c . Donc

$$(c \cdot [\beta]_{hs}) \cdot [\gamma]_{hs} = \tilde{\beta}(1) \cdot [\gamma]_{hs} = \tilde{\gamma}(1) = c \cdot [\beta \otimes \gamma]_{hs} = c \cdot ([\beta]_{hs} \otimes [\gamma]_{hs}) \quad .$$

On dit que le groupe $\Pi_1(Y, y_0)$ **agit** du droit sur le fibre $p^{-1}(y_0)$. Cette action est dit **action de monodromie** de $\Pi_1(Y, y_0)$ sur le fibre et la bijection sur le fibre $p^{-1}(y_0)$ induit par un élément $[\gamma]_{hs} \in \Pi_1(Y, y_0)$ **monodromie**.

3.2.3 Lemme : Propriétés de la monodromie

Soit Y un espace topologique, (C, p) un revêtement de Y et $y_0 \in Y$. On considère la monodromie de $\Pi_1(Y, y_0)$ sur le fibre $p^{-1}(y_0)$. Alors :

1. Soit $c_0 \in p^{-1}(y_0)$. Alors, son stabilisateur est $\text{St}_{\Pi_1}(c_0) = p_* [\Pi_1(C, c_0)]$.
2. On suppose que C est connexe par arcs. Alors, le groupe $\Pi_1(Y, y_0)$ agit transitivement sur le fibre $p^{-1}(y_0)$.
3. On suppose que C est connexe par arcs. Soit $c_0 \in p^{-1}(y_0)$, alors, l'application

$$\underbrace{p_* [\Pi_1(C, c_0)] \setminus \Pi_1(Y, y_0)}_{\text{co-ensembles à droite}} \rightarrow p^{-1}(y_0) \quad , \quad p_* [\Pi_1(C, c_0)] \otimes [\gamma]_{hs} \mapsto c_0 \cdot [\gamma]_{hs}$$

est bien définie et bijective. En particulier

$$\underbrace{|p^{-1}(y_0)|}_{\text{cardinalité du fibre}} = \underbrace{|\Pi_1(Y, y_0) : p_* [\Pi_1(C, c_0)]|}_{\text{index du sous-groupe}} \quad . \quad (3.2.3.1)$$

Preuve :

1. C'est évident que $p_* [\Pi_1(C, c_0)] \subseteq \text{St}_{\Pi_1}(c_0)$. D'autre part, soit $[\gamma]_{hs} \in \text{St}_{\Pi_1}(c_0)$, c'est à dire le relèvement $\tilde{\gamma}$ du γ d'origine c_0 est un lacet. Alors, $[\tilde{\gamma}]_{hs} \in \Pi_1(C, c_0)$ et donc $[\gamma]_{hs} = p_* [\tilde{\gamma}]_{hs} \in p_* [\Pi_1(C, c_0)]$.
2. Soient $c_0, c_1 \in p^{-1}(y_0)$ et $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow C$ un chemin d'origine c_0 et extrémité c_1 . Alors $p(\tilde{\gamma})$ est un lacet basé en y_0 et $c_0 \cdot [p(\tilde{\gamma})]_{hs} = c_1$.
3. D'après propriété (1), $p_* [\Pi_1(C, c_0)]$ est le stabilisateur de c_0 . D'après (2), le fibre $p^{-1}(y_0)$ est l'orbite de c_0 . L'affirmation est une propriété générale d'actions de groupes.

□

3.2.4 Corollaire sur la cardinalité des fibres

Soit Y un espace topologique et (C, p) un revêtement de Y . Si $y_0 \in Y$, alors :

1. Si C est connexe par arcs, alors le cardinal du fibre $p^{-1}(y_0)$ est égal au index de $p_* [\Pi_1(C, c_0)]$ dans $\Pi_1(Y, y_0)$.
2. Si C est simplement connexe, alors le cardinal du fibre $p^{-1}(y_0)$ est l'ordre de $\Pi_1(Y, y_0)$.

Preuve :

1. Suit de 3.2.3(3).
2. Par 2.3.5 le groupe fondamental $\Pi_1(C, c_0)$ est trivial. L'affirmation suit de 3.2.3(3).

□

3.2.5 Lemme : Classes de conjugaison dans le groupe fondamental

Soit Y un espace topologique, (C, p) un revêtement de Y et $y_0 \in Y$. Alors, pour $[\gamma]_{hs} \in \Pi_1(Y, y_0)$ on a

$$p_* [\Pi_1(C, c_0 \cdot [\gamma]_{hs})] = [\gamma]_{hs}^{-1} \otimes p_* [\Pi_1(C, c_0)] \otimes [\gamma]_{hs} \quad \forall c_0 \in p^{-1}(y_0) .$$

Preuve : Par 3.2.3(1) on sait que $p_* [\Pi_1(C, c_0 \cdot [\gamma]_{hs})]$ est le stabilisateur de $c_0 \cdot [\gamma]_{hs}$. L'affirmation est un fait général d'actions de groupes. □

Remarques :

- (i) On suppose que C est connexe par arcs. D'après 3.2.3(2) $\Pi_1(Y, y_0)$ agit transitivement sur le fibre $p^{-1}(y_0)$. Alors, les conjugués de $p_* [\Pi_1(C, c_0)]$ dans $\Pi_1(Y, y_0)$ sont exactement du type $p_* [\Pi_1(C, c_1)]$ avec $c_1 \in p^{-1}(y_0)$. Autrement dit, la famille

$$\{p_* [\Pi_1(C, c_0)] : c_0 \in p^{-1}(y_0)\}$$

forme une classe de conjugaison. On peut donc parler de la *classe de conjugaison d'un fibre*.

3.3 Automorphismes de revêtements

3.3.1 Théorème de relèvements principal

Soit Y un espace topologique et (C, p) un revêtement de Y . Soit X un espace topologique connexe par arcs et localement connexe par arcs. Soit $f : X \rightarrow Y$ continue et $x_0 \in X$, $c_0 \in C$ tels que $p(c_0) = f(x_0)$. Alors, le suivants sont équivalents :

1. Il existe un relèvement $\tilde{f} : (X, x_0) \rightarrow (C, c_0)$ de f par p .
2. On a $f_* [\Pi_1(X, x_0)] \leq p_* [\Pi_1(C, c_0)]$.

En tout cas, le relèvement $\tilde{f}$ est par 3.1.6 unique.

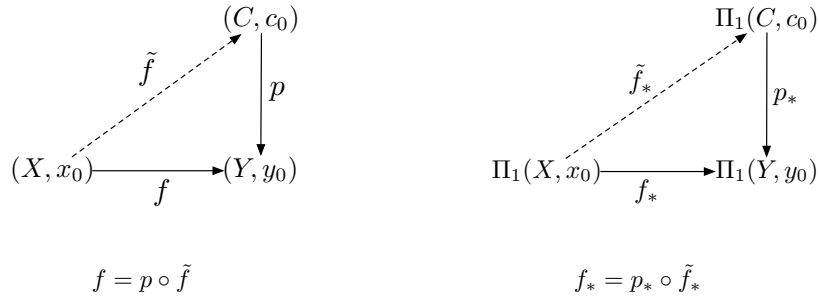


FIGURE 18: Sur les relèvements de fonctions $f : X \rightarrow Y$ par le revêtement p . Les diagrammes commutent.

Preuve :

1 $\Rightarrow$ 2 : Car $f_* = p_* \circ \tilde{f}_*$, cette direction est triviale.

2 $\Rightarrow$ 1 : Car X est connexe par arcs, $f(X)$ est également. Pour $x \in X$ soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow Y$ un chemin d'origine $f(x_0)$ et extrémité $f(x)$ et $\tilde{\gamma} : ([0, 1], 0) \rightarrow (C, c_0)$ le relèvement unique de γ qui satisfait $\tilde{\gamma}(0) = c_0$ (vois 3.1.7). Pose $\tilde{f}(x) := \tilde{\gamma}(1)$. Alors, $\tilde{f}(x)$ est bien défini :

Si $\beta : [0, 1] \rightarrow Y$ est aussi un chemin entre $f(x_0)$ et $f(x)$ avec relèvement $\tilde{\beta} : ([0, 1], 0) \rightarrow (C, c_0)$, alors $\lambda := \gamma \otimes \tilde{\beta}$ est un lacet basé en $f(x_0)$ et

$$[\lambda]_{hs} \in f_* [\Pi_1(X, x_0)] \subseteq p_* [\Pi_1(C, c_0)] .$$

Donc, par remarque 3.2.1(3) il existe un lacet $\tilde{\lambda} : [0, 1] \rightarrow C$ basé en c_0 , tel que $p(\tilde{\lambda}) = \lambda$. Pose

$$\tilde{\gamma}'(s) := \tilde{\lambda}\left(\frac{s}{2}\right) \quad , \quad \tilde{\beta}'(s) := \tilde{\lambda}\left(\frac{2-s}{2}\right)$$

alors $\tilde{\gamma}'$ et $\tilde{\beta}'$ sont relèvements de γ et β qui satisfont $\tilde{\gamma}'(0) = c_0$ et $\tilde{\beta}'(0) = c_0$. Par unicité (vois 3.1.7) des relèvements il faut $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}'$ et $\tilde{\beta} = \tilde{\beta}'$. Donc $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\lambda}(1/2) = \tilde{\beta}(1)$.

Donc, on a construit une fonction $\tilde{f} : X \rightarrow C$ telle que $f = p \circ \tilde{f}$ et $\tilde{f}(x_0) = c_0$.

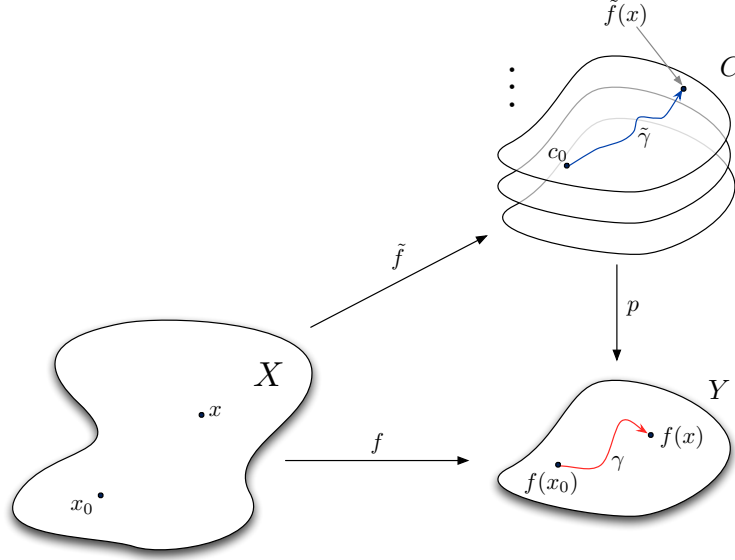


FIGURE 19: Sur la construction du relèvement $\tilde{f} : X \rightarrow C$ de $f : X \rightarrow Y$. Le diagramme commute.

Il reste à montrer que $\tilde{f}$ est vraiment continue. Car X est localement connexe par arcs, il existe pour tout $x \in X$ un voisinage W de x connexe par arcs tel que $f(W)$ est contenu dans un ouvert trivialisant V de Y ⁹. Soit $U \subseteq C$ le feuillet de V contenant $\tilde{f}(x)$, alors $p|_U : U \rightarrow V$ est homéomorphe. Car $f(W)$ est connexe par arcs, il faut $\tilde{f}(W) \subseteq U$:

Car $p|_U : U \rightarrow V$ est homéomorphe, tout chemin d'origine $f(x)$ dans V a son unique relèvement d'origine $\tilde{f}(x)$ dans U . Pour $x' \in W$ on peut choisir un chemin $\gamma \otimes \gamma'$ entre x_0 et x' , tel que γ connecte x_0 à x et γ' connecte x à x' . Soient $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\gamma}'$ leurs relèvements uniques (déterminés par $\tilde{\gamma}(0) = c_0$), alors par construction $\tilde{\gamma}'(0) = \tilde{\gamma}(1) = \tilde{f}(x)$, donc $\tilde{\gamma}'([0, 1]) \subseteq U$. Par conséquent $\tilde{f}(x') \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\gamma}'(1) \in U$.

En particulier, la restriction $\tilde{f}|_W = p|_U^{-1} \circ f|_W$ est continue. Par A.0.10, tout $\tilde{f} : X \rightarrow C$ est continue. $\square$

3.3.2 Définition: Groupe des automorphismes d'un revêtement

Soient C, X espaces topologiques et (C, p) un revêtement de X . On note

$$\text{Aut}(p) := \{f : C \rightarrow C \text{ homéomorphisme} \mid p \circ f = p\}$$

le groupe des homéomorphismes sur C (par rapport à la composition) qui préservent p à droite¹⁰. On appelle les éléments de $\text{Aut}(p)$ **automorphismes** du revêtement p .

9. Choisisse V un trivialisant contenant $f(x)$. Choisisse un ouvert W connexe par arcs tel que $x \in W \subseteq f^{-1}(V)$. Alors $f(W) \subseteq V$.

10. Anglais : Deck transformation group.

Remarques :

- (i) L'ensemble $\text{Aut}(p)$ est vraiment un groupe.
- (ii) Soit $y_0 \in Y$. Alors, pour $c_0 \in p^{-1}(y_0)$ il faut $p(c_0) = p(f(c_0))$ et donc $f(c_0) \in p^{-1}(y_0)$. Autrement dit, tout fibre est un invariant de tout automorphisme de p . Par conséquence, automorphismes des revêtements opèrent sur fibres comme permutations. En particulier, $\text{Aut}(p)$ agit sur tout fibre par restriction.

3.3.3 Lemme sur automorphismes des revêtements

Soit Y un espace topologique et (C, p) un revêtement de Y . On suppose que C est localement connexe. Soit $y_0 \in Y$ et $W \subseteq Y$ un voisinage de y_0 . Alors, il existe un voisinage trivialisant $V \subseteq W$ de y_0 tel que, si U_0 est le feuillet de V contenant $c_0 \in p^{-1}(y_0)$, alors $f(U_0)$ est le feuillet contenant $f(c_0)$ pour tout $f \in \text{Aut}(p)$.

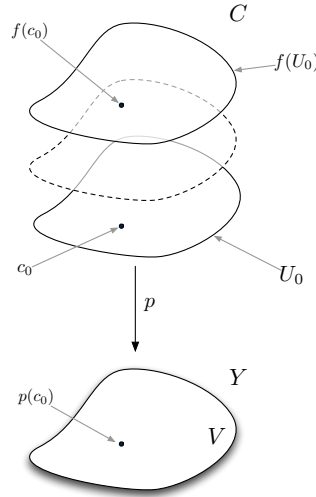


FIGURE 20: Sur les images des feuillets par automorphismes du revêtement.

Preuve : Soit $c_0 \in p^{-1}(y_0)$ quelconque et $W \subseteq Y$ un voisinage de y_0 . Car C est localement connexe, on peut choisir le trivialisant $V \subseteq W$ de y_0 tel que tout son feuillet est connexe¹¹.

Soit U_0 le feuillet contenant c_0 . Soit $f \in \text{Aut}(p)$ et U_1 le feuillet de V contenant $f(c_0)$. On va montrer que $f(U_0) = U_1$.

Soit $x_0 \in U_0$ quelconque. On sait que $f(x_0)$ est dans le même fibre que x_0 , donc il existe un feuillet $\tilde{U}_1$ de V qui contient $f(x_0)$. En particulier, $f(U_0) \subseteq p^{-1}(V)$. Si $f(U_0) \not\subseteq U_1$, alors $f(U_0)$ est union des ouverts non-vides disjointes, une contradiction car $f(U_0)$ est aussi connexe. Donc il faut $f(U_0) \subseteq U_1$.

D'autre part, on sait que $f^{-1} \in \text{Aut}(p)$ est tel que $f^{-1}(f(c_0)) = c_0 \in U_0$. Donc, de même on trouve $f^{-1}(U_1) \subseteq U_0$.

□

Interprétation : Tout point $y_0 \in Y$ possède un voisinage trivialisant, tel que tout automorphisme $f \in \text{Aut}(p)$ permute les feuillets de V .

11. Car tout trivialisant dans Y est homéomorphe à une ouverte dans C , il est aussi localement connexe. Soit V un voisinage de y_0 trivialisant contenant dans W . Choisisit voisinage $y_0 \in \tilde{V} \subseteq V$ connexe. Alors, $\tilde{V}$ est aussi un trivialisant. Car il est homéomorphe à tous ses feuillets, ils sont aussi connexes.

3.3.4 Lemme : Commutativité des automorphismes avec la monodromie

Soit Y un espace topologique et (C, p) un revêtement de Y . Soient $y_0 \in Y$, $f \in \text{Aut}(p)$ et $\gamma : [0, 1] \rightarrow Y$ un chemin d'origine y_0 . Alors, on a

$$f(c_0 \cdot [\gamma]_{hs}) = f(c_0) \cdot [\gamma]_{hs} \quad \forall c_0 \in p^{-1}(y_0) .$$

En particulier, les actions des groupes $\text{Aut}(p)$ et $\Pi_1(Y, y_0)$ sur le fibre $p^{-1}(y_0)$ commutent.

Preuve : Si $\tilde{\gamma}$ est le relèvement de γ d'origine c_0 , alors $f(\tilde{\gamma})$ est le relèvement de γ d'origine $f(c_0)$. □

3.3.5 Lemme : Unicité des automorphismes d'un revêtement

Soit Y un espace topologique et (C, p) un revêtement de Y . On suppose que C est connexe. Si $c_0, c_1 \in C$, alors il existe au plus un $f \in \text{Aut}(p)$ tel que $f(c_0) = c_1$.

Preuve : Soit $\tilde{f} \in \text{Aut}(p)$ tel que $\tilde{f}(c_0) = c_1$. Pose $(X, x_0) := (C, c_0)$ et $f := p \circ \tilde{f}$. Alors $\tilde{f} : (X, x_0) \rightarrow (C, c_1)$ est un relèvement de $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, p(c_1))$ par p lui même, et par 3.1.6 unique. □

Remarques :

- (i) Soit Y connexe par arcs. Alors, par 3.1.8 tous fibres du revêtement ont même cardinalité. D'après 3.3.5, $\text{Aut}(p)$ est au plus de même cardinal que tout fibre.
- (ii) Un automorphisme du revêtement p est l'identité ssi il possède un point fixe. Autrement dit, le groupe $\text{Aut}(p)$ agit librement sur C .

3.3.6 Théorème : Existence d'automorphismes de revêtements

Soit Y un espace topologique et $(C_0, p_0), (C_1, p_1)$ deux revêtement de Y . On suppose que C_0, C_1 sont connexes par arcs et localement connexes par arcs. Soient $c_0 \in C_0, c_1 \in C_1$ tels que $p_0(c_0) = p_1(c_1)$. Alors, le deux affirmations sont équivalentes :

1. $p_{0*}(\Pi_1(C_0, c_0)) = p_{1*}(\Pi_1(C_1, c_1))$.
2. Il existe un homéomorphisme $\tilde{f} : (C_0, c_0) \rightarrow (C_1, c_1)$ tel que $p_0 = p_1 \circ \tilde{f}$.

En tout cas, d'après 3.1.6 $\tilde{f}$ est unique.

Preuve :

1 $\Rightarrow$ 2 : Pose $(X, x_0) := (C_0, c_0)$ et $f := p_0 : (X, x_0) \rightarrow (Y, p_1(c_1))$. D'après les hypothèses on a

$$f_*(\Pi_1(X, x_0)) \subseteq p_{1*}(\Pi_1(C_1, c_1)) .$$

Donc, par théorème 3.3.1 il existe un relèvement $\tilde{f} : (X, x_0) \rightarrow (C_1, c_1)$ unique de f par p_1 , c'est à dire une $\tilde{f} : (C_0, c_0) \rightarrow (C_1, c_1)$ continue qui satisfait $p_1 \circ \tilde{f} = p_0$. Mais de même façon, on peut trouver une $\tilde{g} : (C_1, c_1) \rightarrow (C_0, c_0)$ continue telle que $p_0 \circ \tilde{g} = p_1$. Donc $p_1 \circ \tilde{f} \circ \tilde{g} = p_1$ et $\tilde{f} \circ \tilde{g}(c_1) = c_1$. Par remarque 3.3.5(ii) il faut $\tilde{f} \circ \tilde{g} = \text{Id}$. De même on retrouve $\tilde{g} \circ \tilde{f} = \text{Id}$, donc $\tilde{f}$ est un homéomorphisme avec inverse $\tilde{g}$.

2 $\Rightarrow$ 1 : Par symétrie, il suffit de montrer l'inclusion $p_{0*}(\Pi_1(C_0, c_0)) \subseteq p_{1*}(\Pi_1(C_1, c_1))$. Soit $[\gamma]_{hs} \in p_{0*}[\Pi_1(C_0, c_0)]$, c'est-à-dire le relèvement $\tilde{\gamma}$ de γ par p_0 d'origine c_0 est un lacet. Alors, par les hypothèses $f(\tilde{\gamma})$ est un (le) relèvement de γ par p_1 d'origine c_1 et évidemment fermé. Donc $[\gamma]_{hs} \in p_{1*}[\Pi_1(C_1, c_1)]$. □

Remarque : En appliquant le théorème au cas $(C_0, p_0) = (C_1, p_1) =: (C, p)$, on trouve une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un automorphisme $f \in \text{Aut}(p)$ satisfaisant $f(c_0) = c_1$.

3.3.7 Lemme : Classes d'équivalence de revêtements

Soit Y un espace topologique et $(C_0, p_0), (C_1, p_1)$ revêtements de Y . On suppose que C_0, C_1 sont connexes par arcs et localement connexes par arcs. Soient $c_0 \in C_0, c_1 \in C_1$ tels que $p_0(c_0) = p_1(c_1)$. Alors on a équivalence entre :

1. Les revêtements sont équivalents.
2. Les sous-groupes $p_{0*}[\Pi_1(C_0, c_0)]$ et $p_{1*}[\Pi_1(C_1, c_1)]$ sont conjugués dans $\Pi_1(Y, y)$.

Remarque : Choisir $y \in Y$ fixé. Par remarque 3.2.5(i) on peut redire l'affirmation du théorème comme :

Les revêtements p_1, p_2 sont équivalents ssi les deux classes de conjugaison

$$\{p_{k*}[\Pi_1(C, c)] : c \in p_k^{-1}(y)\} \quad , \quad k = 1, 2$$

du fibre de y par rapport à p_1 et p_2 sont égales.

Donc, classes d'équivalence de revêtements (de la connexité ci-dessus) correspondent à classes de conjugaison de sous-groupes du groupe fondamental $\Pi_1(Y, y)$.

Preuve :

1 $\Rightarrow$ 2 : Soit $h : C_0 \rightarrow C_1$ un homéomorphisme tel que $p_0 = p_1 \circ h$ et $c'_1 := h(c_0)$, alors $c'_1 \in C_1$ est aussi dans le fibre de y et $h : (C_0, c_0) \rightarrow (C_1, c'_1)$. Par théorème 3.3.6 il faut $p_{0*}[\Pi_1(C_0, c_0)] = p_{1*}[\Pi_1(C_0, c'_1)]$. Par remarque 3.2.5(i) $p_{1*}[\Pi_1(C_1, c'_1)]$ est conjugué à $p_{1*}[\Pi_1(C_1, c_1)]$.

2 $\Rightarrow$ 1 : Par remarque 3.2.5(i) il existe un $c'_1 \in p_1^{-1}(y)$ tel que $p_{1*}[\Pi_1(C_1, c'_1)] = p_{0*}[\Pi_1(C_0, c_0)]$. Par théorème 3.3.6 il existe un homéomorphisme $h : (C_0, c_0) \rightarrow (C_1, c'_1)$ tel que $p_0 = p_1 \circ h$, donc les revêtements sont équivalents.

□

3.3.8 Théorème : Automorphismes comme permutations des fibres

Soit Y un espace topologique et (C, p) un revêtement de Y . On suppose que C est connexe par arcs et localement connexe par arcs. Soit $y_0 \in Y$ quelconque fixé. Alors l'ensemble

$$\text{Sym}_p(y_0) := \{g \in \text{Sym}(p^{-1}(y_0)) : g(c_0 \cdot [\gamma]_{hs}) = g(c_0) \cdot [\gamma]_{hs} \quad \forall c_0 \in p^{-1}(y_0), [\gamma]_{hs} \in \Pi_1(Y, y_0)\}$$

est un sous-groupe de $\text{Sym}(p^{-1}(y_0))$ et l'application

$$\text{Aut}(p) \rightarrow \text{Sym}_p(y_0) \quad , \quad f \mapsto f|_{p^{-1}(y_0)} \quad (3.3.8.1)$$

un isomorphisme de groupes. Elle envoie tout automorphisme de p à une permutation du fibre $p^{-1}(y_0)$ qui commute avec l'action de monodromie.

Interprétation : Les permutations du fibre $p^{-1}(y_0)$ compatibles à l'action de $\Pi_1(Y, y_0)$, sont exactement ceux induits par les automorphismes de p .

Preuve : D'après remarque 3.3.2(ii), la restriction $f|_{p^{-1}(y_0)}$ d'un automorphisme $f \in \text{Aut}(p)$ est vraiment une bijection du fibre $p^{-1}(y_0)$ dans lui même, qui d'après 3.3.4 commute avec l'action de monodromie. Évidemment l'application (3.3.8.1) est un homomorphisme de groupes. Par unicité 3.3.5 elle est injective.

D'autre part, soit $g \in \text{Sym}_p(y_0)$ et $c_0 \in p^{-1}(y_0)$ quelconque. Alors, les deux points $c_0, g(c_0)$ ont même stabilisateur par rapport à la monodromie. D'après 3.2.3(1) ça implique $p_*[\Pi_1(C, c_0)] = p_*[\Pi_1(C, g(c_0))]$ et par 3.3.6

il existe un $f \in \text{Aut}(p)$ tel que $f(c_0) = g(c_0)$. Il reste à montrer que $f|_{p^{-1}(p_0)} = g$. Soit $c_1 \in p^{-1}(y_0)$ quelconque. Par 3.2.3(2) on peut trouver un $[\gamma]_{hs} \in \Pi_1(Y, y_0)$ tel que $c_1 = c_0 \cdot [\gamma]_{hs}$. Donc

$$g(c_1) = g(c_0) \cdot [\gamma]_{hs} = f(c_0) \cdot [\gamma]_{hs} = f(c_1)$$

qui prouve l'affirmation. □

3.3.9 Théorème : Structure du groupe des automorphismes

Soit Y un espace topologique et (C, p) un revêtement de Y . On suppose que C est connexe par arcs et localement connexe par arcs. Alors, pour $c_0 \in C$ on a

$$\boxed{\text{Aut}(p) \cong \mathcal{N}(p_*[\Pi_1(C, c_0)]) / p_*[\Pi_1(C, c_0)]} \quad (3.3.9.1)$$

où $\mathcal{N}(\cdot)$ est le normalisateur d'un sous-group¹² dans $\Pi_1(Y, p(c_0))$. En particulier, si $\Pi_1(C) = \{0\}$, on trouve

$$\text{Aut}(p) \cong \Pi_1(Y) \quad .$$

Preuve : Note $N := \mathcal{N}(p_*[\Pi_1(C, c_0)])$. Soit $[\gamma]_{hs} \in N$. Alors

$$\begin{aligned} p_*[\Pi_1(C, c_0 \cdot [\gamma]_{hs})] &\stackrel{3.2.3(1)}{=} \text{St}(c_0 \cdot [\gamma]_{hs}) \stackrel{3.2.3(1)}{=} [\gamma]_{hs} \otimes \text{St}(c_0) \otimes [\bar{\gamma}]_{hs} \\ &= [\gamma]_{hs} \otimes p_*[\Pi_1(C, c_0)] \otimes [\bar{\gamma}]_{hs} \stackrel{[\gamma]_{hs} \in N}{=} p_*[\Pi_1(C, c_0)] \end{aligned}$$

c'est à dire

$$p_*[\Pi_1(C, c_0 \cdot [\gamma]_{hs})] = p_*[\Pi_1(C, c_0)] \quad . \quad (3.3.9.2)$$

Par théorème 3.3.6 il existe une unique $f \in \text{Aut}(p)$ telle que $f(c_0) = c_0 \cdot [\gamma]_{hs}$. On peut donc définir une application

$$\Phi : N \rightarrow \text{Aut}(p) \quad , \quad [\gamma]_{hs} \mapsto \Phi([\gamma]_{hs})$$

où $\Phi([\gamma]_{hs})$ est exactement cet automorphisme de p qui envoie c_0 à $c_0 \cdot [\gamma]_{hs}$. Cette application satisfait :

- Φ est un homomorphisme de groupes : Pour $[\beta]_{hs}, [\gamma]_{hs} \in N$, d'après 3.3.4 l'automorphisme $\Phi([\beta]_{hs}) \circ \Phi([\gamma]_{hs})$ est l'automorphisme du p qui envoie c_0 à $c_0 \cdot [\beta \otimes \gamma]_{hs}$. Autrement dit :

$$\Phi([\beta]_{hs} \otimes [\gamma]_{hs}) = \Phi([\beta]_{hs}) \circ \Phi([\gamma]_{hs}) \quad .$$

- $\Phi : N \rightarrow \text{Aut}(p)$ est surjectif : Si $f \in \text{Aut}(p)$, alors il existe un chemin $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow C$ entre c_0 et $f(c_0)$. De plus, $p(\tilde{\gamma})$ est un lacet basé en y_0 car $f(c_0) \in p^{-1}(y_0)$ et donc $[p(\tilde{\gamma})]_{hs} \in \Pi_1(Y, y_0)$. Si $\tilde{\beta} \in \Pi_1(C, c_0)$, alors

$$[p(\tilde{\gamma})]_{hs} \otimes [p(\tilde{\beta})]_{hs} \otimes [p(\tilde{\gamma})]_{hs}^{-1} = [p(\underbrace{\tilde{\gamma} \otimes \tilde{\beta} \otimes \tilde{\gamma}}_{\text{lacet basé en } c_0})]_{hs} \in p_*[\Pi_1(C, c_0)]$$

$$[p(\tilde{\gamma})]_{hs}^{-1} \otimes [p(\tilde{\beta})]_{hs} \otimes [p(\tilde{\gamma})]_{hs} = [p(\underbrace{\tilde{\gamma} \otimes \tilde{\beta} \otimes \tilde{\gamma}}_{\text{lacet basé en } f(c_0)})]_{hs} \stackrel{pf^{-1}=p}{=} [p \circ f^{-1}(\underbrace{\tilde{\gamma} \otimes \tilde{\beta} \otimes \tilde{\gamma}}_{\text{lacet basé en } c_0})]_{hs} \in p_*[\Pi_1(C, c_0)]$$

et donc $[p(\tilde{\gamma})]_{hs} \in N$. Finalement, on trouve $\Phi([p(\tilde{\gamma})]_{hs}) = f$.

- Par remarque 3.3.5(ii) : $\ker \Phi = \text{St}(c_0) \cap N = p_*[\Pi_1(C, c_0)]$.

Par le premier théorème d'isomorphisme, on obtient

$$\text{Aut}(p) \cong \mathcal{N}(p_*[\Pi_1(C, c_0)]) / p_*[\Pi_1(C, c_0)] \quad .$$

□

12. Si $H \subseteq G$ est un sous-ensemble du groupe G , alors $\mathcal{N}(H) := \{g \in G : gHg^{-1} = H\} = \{g \in G : gHg^{-1} \subseteq H \wedge g^{-1}Hg \subseteq H\}$. Se rappeler que $\mathcal{N}(H)$ est un sous-group de G et si $H \leq G$, alors $H \trianglelefteq \mathcal{N}(H)$.

3.4 Revêtements galoisiens

3.4.1 Définition: Revêtement galoisien

Soit Y un espace topologique et (C, p) un revêtement de Y . Alors, p est dit **galoisien** (ou **régulier** ou **normal**) ssi $\text{Aut}(p)$ agit transitivement sur tout fibre.

Remarques

- (i) Si C est connexe, alors par remarque 3.3.5(ii) $\text{Aut}(p)$ agit librement sur tout fibre. Si le revêtement est galoisien, alors $\text{Aut}(p)$ est en bijection avec tout fibre.

3.4.2 Théorème : Caractérisation de revêtements galoisiens

Soit Y un espace topologique et (C, p) un revêtement de Y . On suppose que C est connexe par arcs et localement connexe par arcs. Soit $y_0 \in Y$ quelconque. Alors, les suivants sont équivalents :

1. $\text{Aut}(p)$ agit transitivement sur le fibre $p^{-1}(y_0)$.
2. $\text{Aut}(p)$ est galoisien, c'est à dire il agit transitivement sur tout fibre.
3. Pour tous $c_0, c_1 \in p^{-1}(y_0)$ on a $p_* [\Pi_1(C, c_0)] = p_* [\Pi_1(C, c_1)]$.
4. Pour $c_0 \in p^{-1}(y_0)$, le sous-groupe $p_* [\Pi_1(C, c_0)]$ est normal dans $\Pi_1(Y, y_0)$.
5. Si $[\gamma]_{hs} \in \Pi_1(Y, y_0)$ et $c_0 \in p^{-1}(y_0)$ sont tels que $c_0 \cdot [\gamma]_{hs} = c_0$, alors $c_1 \cdot [\gamma]_{hs} = c_1 \quad \forall c_1 \in p^{-1}(y_0)$. Autrement dit, si un relèvement d'un lacet γ basé en y_0 est fermé, alors tous ses relèvements sont fermés.

Preuve :

- $1 \Rightarrow 2$: Soient $y_1 \in Y$ et $b_0, b_1 \in p^{-1}(y_1)$. Car C est connexe par arcs, Y est également. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow Y$ un chemin d'origine y_1 et extrémité y_0 , alors $b_{0,1} \cdot [\gamma]_{hs} \in p^{-1}(y_0)$. Soit $f \in \text{Aut}(p)$ tel que $f(b_0 \cdot [\gamma]_{hs}) = b_1 \cdot [\gamma]_{hs}$, alors $f(b_0 \cdot [\gamma]_{hs}) = f(b_0) \cdot [\gamma]_{hs}$ et donc $f(b_0) = b_1$.
- $2 \Rightarrow 1$: Trivial.
- $1 \Rightarrow 3$: Suit de 3.3.6 car il existe un $f \in \text{Aut}(p)$ tel que $f(c_0) = c_1$.
- $3 \Rightarrow 1$: Soient $c_0, c_1 \in p^{-1}(y_0)$. Par théorème 3.3.6 il existe un $f \in \text{Aut}(p)$ tel que $f(c_0) = c_1$.
- $3 \Rightarrow 4$: Soit $[\gamma]_{hs} \in \Pi_1(Y, y_0)$, alors

$$[\gamma]_{hs}^{-1} \otimes p_* [\Pi_1(C, c_0)] \otimes [\gamma]_{hs} \stackrel{3.2.5}{=} p_* [\Pi_1(C, c_0 \cdot [\gamma]_{hs})] \stackrel{(3)}{=} p_* [\Pi_1(C, c_0)] \quad ,$$

donc $p_* [\Pi_1(C, c_0)]$ est normal.

- $4 \Rightarrow 3$: D'après 3.2.3(2) le groupe $\Pi_1(Y, y_0)$ agit transitivement sur le fibre $p^{-1}(y_0)$. Soit $[\gamma]_{hs} \in \Pi_1(Y, y_0)$ tel que $c_1 = c_0 \cdot [\gamma]_{hs}$. Alors

$$p_* [\Pi_1(C, c_1)] \stackrel{3.2.5}{=} [\gamma]_{hs}^{-1} \otimes p_* [\Pi_1(C, c_0)] \otimes [\gamma]_{hs} \stackrel{\text{normalité}}{=} p_* [\Pi_1(C, c_0)] \quad .$$

- $1 \Rightarrow 5$: Soit $c_0 \cdot [\gamma]_{hs} = c_0$ pour quelques $c_0 \in p^{-1}(y_0)$, $[\gamma]_{hs} \in \Pi_1(Y, y_0)$. Pour $c_1 \in p^{-1}(y_0)$ choisis $f \in \text{Aut}(p)$ tel que $f(c_0) = c_1$. Alors

$$c_1 \cdot [\gamma]_{hs} = f(c_0) \cdot [\gamma]_{hs} = f(c_0 \cdot [\gamma]_{hs}) = f(c_0) = c_1 \quad .$$

- $5 \Rightarrow 3$: Il suffit à montrer que $p_* [\Pi_1(C, c_0)] \subseteq p_* [\Pi_1(C, c_1)]$ pour tout $c_0, c_1 \in p^{-1}(y_0)$. Soit $[\gamma]_{hs} \in p_* [\Pi_1(C, c_0)]$, c'est à dire $c_0 \cdot [\gamma]_{hs} = c_0$. Par supposition ça implique $c_1 \cdot [\gamma]_{hs} = c_1$ et donc $[\gamma]_{hs} \in p_* [\Pi_1(C, c_1)]$.

□

Remarque : C'est intéressant de noter l'équivalence entre la transitivité de $\text{Aut}(p)$ sur un concrète fibre et tous les fibres, ou de même, l'équivalence entre la normalité d'un $p_* [\Pi_1(C, c_0)]$ dans $\Pi_1(Y, p(c_0))$ et la normalité de tous sous-groupes de ce type. Cela suit du fait que pour tout $c_0, c_1 \in C$ les groupes fondamentaux $\Pi_1(C, c_0)$, $\Pi_1(C, c_1)$ sont isomorphes (vois 2.3.4) via l'isomorphisme $\Phi_{\tilde{\gamma}}$ induit par un chemin $\tilde{\gamma}$ connectant c_0 et c_1 . De même, $p(\tilde{\gamma})$ induit l'isomorphisme $\Phi_{p(\tilde{\gamma})}$ entre $\Pi_1(Y, p(c_0))$ et $\Pi_1(Y, p(c_1))$. Car p_* respecte la structure des chemins, c'est-à-dire $p_* \circ \Phi_{\tilde{\gamma}} = \Phi_{p(\tilde{\gamma})} \circ p_*$, la normalité $p_* [\Pi_1(C, c_0)] \trianglelefteq \Pi_1(Y, p(c_0))$ implique la normalité $p_* [\Pi_1(C, c_1)] \trianglelefteq \Pi_1(Y, p(c_1))$.

$$\begin{array}{ccc}
 \Pi_1(C, c_0) & \xrightarrow[\text{isomorphisme}]{\Phi_{\tilde{\gamma}}} & \Pi_1(C, c_1) \\
 \downarrow p_* & & \downarrow p_* \\
 \Pi_1(C, p(c_0)) & \xrightarrow[\Phi_{p(\tilde{\gamma})}]{\text{isomorphisme}} & \Pi_1(C, p(c_1))
 \end{array}$$

FIGURE 21: Sur la caractérisation de revêtements galoisiens : Le diagramme ci-dessus commute. Donc, si $p_* [\Pi_1(C, c_0)] \trianglelefteq \Pi_1(C, p(c_0))$, alors $p_* [\Pi_1(C, c_1)] \trianglelefteq \Pi_1(Y, p(c_1))$.

3.4.3 Corollaire : Structure des revêtements galoisiens

Soit Y un espace topologique et (C, p) un revêtement galoisien de Y . On suppose que C est connexe par arcs et localement connexe par arcs. Soit $c_0 \in C$ et $y_0 := p(c_0)$. Alors

$$\text{Aut}(p) \cong \Pi_1(Y, y_0) / p_* [\Pi_1(C, c_0)] \quad .$$

En particulier, par lemme 3.2.3(3) $\text{Aut}(p)$ a le même cardinal comme les fibres $p^{-1}(y_0)$.

Preuve : Par 3.4.2 le sous-groupe $p_* [\Pi_1(C, c_0)]$ est normal dans $\Pi_1(Y, y_0)$. Donc l'affirmation suit de théorème 3.3.9.

3.4.4 Corollaire sur fibres de cardinal 2

Soit Y un espace topologique et (C, p) un revêtement de Y . On suppose que C est connexe par arcs et localement connexe par arcs. Si $y_0 \in Y$ est n'importe quel tel que le fibre $p^{-1}(y_0)$ a cardinal au maximum 2, alors p est galoisien.

Preuve : Soit $c_0 \in p^{-1}(y_0)$ quelconque. Par lemme 3.2.3(3) l'indice de $p_* [\Pi_1(C, c_0)]$ dans $\Pi_1(Y, y_0)$ est égal au cardinal de $p^{-1}(y_0)$, c'est-à-dire au maximum 2. Comme on sait, cela implique $p_* [\Pi_1(C, c_0)] \trianglelefteq \Pi_1(Y, y_0)$, donc par théorème 3.4.2 que p est galoisien. □

3.4.5 Lemme : Actions de groupes proprement discontinues

Soit C un espace topologique. Soit G un groupe qui agit sur C via homéomorphismes **proprement discontinu**, c'est à dire

$$\forall c \in C : \exists \text{ voisinage } U \ni c : \forall g \in G \setminus \{1\} : g(U) \cap U = \emptyset \quad . \quad (3.4.5.1)$$

Alors, l'application quotient $\hat{p} : C \rightarrow C/G$ (vois A.0.12) définie par $\hat{p}(c) := \text{Orb}_G(c) =: [c]$ est un revêtement galoisien dont les fibres sont exactement les orbites de G sur C . Si de plus C est connexe, alors son groupe des automorphismes est exactement $\text{Aut}(\hat{p}) = G$.

Preuve : Par construction de la topologie quotient, $\hat{p} : C \rightarrow C/G$ est continue. Soit $[c] \in C/G$ et U un voisinage de $c \in C$ tel que $g(U) \cap U = \emptyset \ \forall g \in G \setminus \{1\}$ et pose $V := \hat{p}(U)$. Alors $V \subseteq C/G$ et un ouvert qui contient $[c]$ car

$$\hat{p}^{-1}(V) = \hat{p}^{-1}(\hat{p}(U)) = \bigcup_{g \in G} \underbrace{g(U)}_{\text{ouvert}}.$$

Car $g(U) \cap f(U) = \emptyset \ \forall f \neq g \in G$ on a en fait

$$\hat{p}^{-1}(V) = \bigsqcup_{g \in G} g(U).$$

Il reste à montrer que les ouverts $\{g(U)\}_{g \in G}$ sont des feuillettes du V par rapport à $\hat{p}$. Le fait que pour tout $f \neq g \in G$ les $f(g(U)), g(U)$ sont disjoints, implique que pour tout élément $x \in g(U)$ on a $[x] \cap g(U) = \{x\}$. Alors, la restriction $\hat{p}|_{g(U)} : g(U) \rightarrow V$ est bijective. Si $\tilde{U} \subseteq g(U)$ est une ouverte, alors par les mêmes arguments comme ci-dessus son image $\hat{p}(\tilde{U})$ est ouvert, c'est-à-dire $(\hat{p}|_{g(U)})^{-1} : V \rightarrow g(U)$ est aussi continue. Donc, $\hat{p}|_{g(U)} : g(U) \rightarrow V$ est un homéomorphisme et $\hat{p}$ un revêtement.

Car tout $g \in G$ préserve les orbites on a $G \subseteq \text{Aut}(\hat{p})$. Comme G agit transitivement sur les orbites, c'est-à-dire les fibres, $\text{Aut}(\hat{p})$ fait également et donc $\hat{p}$ est galoisien. D'autre part, soit C connexe et $f \in \text{Aut}(\hat{p})$, alors pour tout $c \in C$ il faut $[f(c)] = [c]$, c'est-à-dire il existe une $g \in G$ telle que $f(c) = g(c)$. Par l'unicité des automorphismes des revêtements 3.3.5, il faut $f = g$, c'est-à-dire $\text{Aut}(\hat{p}) \subseteq G$. □

3.4.6 Lemme : Discontinuité propre des automorphismes

Soit Y un espace topologique et (C, p) un revêtement de Y . On suppose que C est connexe et localement connexe. Alors, le groupe $\text{Aut}(p)$ agit proprement discontinûment sur C .

Preuve : Soit $c_0 \in C$. Alors, par lemme 3.3.3 on peut choisir un voisinage V trivialisant de $p(c_0)$, tel que pour tout automorphisme $f \in \text{Aut}(p)$ l'image $f(U)$ d'un feuillet U de V est encore un feuillet de V . Soit U_0 le feuillet de V qui contient c_0 et $f \in \text{Aut}(p) \setminus \{\text{Id}\}$ quelconque. On sait que $f(c_0)$ est dans le même fibre comme c_0 et par 3.3.5 que l'image $f(U_0)$ est inégal à U_0 , donc le feuillet $f(U_0)$ est inégal, c'est à dire disjoint, à U_0 . □

3.4.7 Théorème : Représentation de l'espace base

Soit Y un espace vectoriel et (C, p) un revêtement galoisien de Y . On suppose que C est connexe par arcs et localement connexe par arcs. Soit $\hat{p} : C \rightarrow C/\text{Aut}(p)$ comme dans lemme¹³ 3.4.5. Alors, il existe un homéomorphisme $h : C/\text{Aut}(p) \rightarrow Y$ tel que $p = h \circ \hat{p}$.

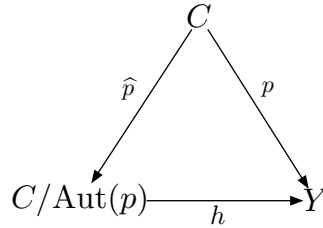


FIGURE 22: Sur la représentation d'espace base Y par l'espace quotient $C/\text{Aut}(p)$. Le diagramme commute.

13. Se rappeler que $\text{Aut}(p)$ agit d'après remarque 3.3.5(ii) librement et d'après 3.4.6 proprement discontinûment sur C .

Interprétation : Par définition d'un revêtement galoisien, les orbites de $\text{Aut}(p)$ sont exactement les fibres de p . Donc, le théorème réaffirme l'intuition que l'espace base Y est en principe l'espace totale modulo ses fibres avec revêtement l'application quotient.

3.4.8 Définition: Action du groupe fondamental sur l'espace total

Soit Y un espace topologique, (C, p) un revêtement galoisien de Y et $y_0 \in Y$ fixé. On suppose que C est connexe et choisit un $c_0 \in p^{-1}(y_0)$ fixé. Soit $[\gamma]_{hs} \in \Pi_1(Y, y_0)$ n'importe quel. Alors, par définition d'un revêtement galoisien et 3.3.5, il existe un unique $f_{c_0, [\gamma]_{hs}} \in \text{Aut}(p)$ tel que $f_{c_0, [\gamma]_{hs}}(c_0) = c_0 \cdot [\gamma]_{hs}$. L'association $[\gamma]_{hs} \mapsto f_{c_0, [\gamma]_{hs}}$ donne une application $\Pi_1(Y, y_0) \rightarrow \text{Aut}(p)$, qui est par 3.3.4 en fait un homomorphisme, c'est-à-dire

$$f_{c_0, [\gamma_1]_{hs} \otimes [\gamma_2]_{hs}} = f_{c_0, [\gamma_1]_{hs}} \otimes f_{c_0, [\gamma_2]_{hs}} \quad .$$

En ce façon, $\Pi_1(Y, y_0)$ agit sur C via automorphismes de p . Note que l'exact action dépende du choix de $c_0 \in p^{-1}(y_0)$. Pour $c_1 \in p^{-1}(y_0)$ on trouve

$$f_{c_1, [\gamma]_{hs}} = g \circ f_{c_0, [\gamma]_{hs}} \circ g^{-1}$$

où $g \in \text{Aut}(p)$ est l'unique automorphisme de p qui envoie c_0 sur c_1 .

3.5 Le théorème de van Kampen

3.5.1 Définition: Produit libre de deux groupes

Soient G, H deux groupes. Alors, leur **produit libre** $G \star H$ est le groupe, dans lequel les groupes G et H s'injectent via morphismes $i : G \hookrightarrow G \star H$ et $j : H \hookrightarrow G \star H$ et qui satisfait la **propriété universelle** suivante :

Pour tout groupe K et morphismes des groupes $g : G \rightarrow K$, $h : H \rightarrow K$ il existe un unique morphisme $f : G \star H \rightarrow K$ tel que $g = f \circ i$ et $h = f \circ j$.

L'universalité ci-dessus définit $G \star H$ de manière unique à isomorphisme près. L'existence est montré ci-dessous dans 3.5.2.

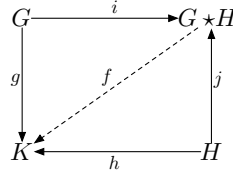


FIGURE 23: Sur la définition du produit libre $G \star H$. L'universalité de $G \star H$ se traduit à l'existence du morphisme $f : G \star H \rightarrow K$, tel que le diagramme commute.

3.5.2 Représentation du produit libre

Soient G, H deux groupes et $G \star H$ l'ensemble des **mots** formés par une alternance d'éléments de G et d'éléments de H , c'est-à-dire

$$G \star H := \{()\} \cup \bigcup_{\substack{n, m \in \mathbb{N} \\ n \leq m}} \bigtimes_{i=n}^m S_i \quad \text{où} \quad S_i := \begin{cases} G \setminus \{1\} & : i \in 2\mathbb{Z} \\ H \setminus \{1\} & : i \in \mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z} \end{cases} .$$

On définit sur $G \star H$ l'opération binaire $\circ : (G \star H) \times (G \star H) \rightarrow (G \star H)$ donnée par l'enchaînement et réduction du résultat par les *règles de réduction* suivantes :

- (i) Remplacer toute paire d'éléments adjacents de même groupe G ou H par leur produit dans leur groupe original.
- (ii) Annuler toutes instances des éléments neutres 1.
- (iii) Répéter les réductions (i) et (ii) jusqu'à il n'y a rien à faire.

Cette opération est associative et admet comme élément neutre le mot vide. De plus, tout mot $(s_1, \dots, s_n) \in G \star H$ possède l'inverse $(s_n^{-1}, \dots, s_1^{-1}) \in G \star H$. Par conséquent, la paire $(G \star H, \circ)$ possède la structure d'un groupe. Les morphismes $i : G \rightarrow G \star H$, $j : H \rightarrow G \star H$ définis par $i(g) = (g)$ et $j(h) := (h)$ s'appellent les **plongements canoniques** des G, H dans $G \star H$.

Ce groupe satisfait en fait l'universalité postulée dans 3.5.1 : Si $(K, \circ)$ est un groupe et $g : G \rightarrow K$, $h : H \rightarrow K$ morphismes de groupes, alors le morphisme

$$f : G \star H \rightarrow K \quad , \quad f(s_1, \dots, s_n) := f(s_1) \circ \dots \circ f(s_n) \quad , \quad f(s) := \begin{cases} g(s) & : s \in G \\ h(s) & : s \in H \end{cases}$$

est le (unique) morphisme qui satisfait $g = f \circ i$ et $h = f \circ j$.

Remarques :

- (i) Le produit libre est symétrique, ça veut dire $G \star H \cong H \star G$.
- (ii) Si les deux groupes G, H ne sont pas triviaux, alors $G \star H$ est toujours d'ordre infini et non-abélien.
- (iii) Si le groupe G est trivial, alors le plongement canonique $j : H \hookrightarrow G \star H$ est un isomorphisme et donc $G \star H \cong H$.

Exemple : Si G et H sont les groupes cycliques infinis engendrés par g et h , alors $G \star H$ se compose des produits alternants des puissances de x et puissances de y .

3.5.3 Définition: Pushout de morphismes

Soient $f_x : Z \rightarrow X$, $f_y : Z \rightarrow Y$ deux morphismes. Alors, leur **pushout** est un objet P avec deux morphismes $g_x : X \rightarrow P$, $g_y : Y \rightarrow P$ tels que $g_y \circ f_y = g_x \circ f_x$, et qui satisfait la propriété universelle :

Si Q est aussi un objet avec morphismes $h_x : X \rightarrow Q$, $h_y : Y \rightarrow Q$ tels que $h_x \circ f_x = h_y \circ f_y$, alors il existe un unique morphisme $\Phi : P \rightarrow Q$ tel que $h_x = \Phi \circ g_x$ et $h_y = \Phi \circ g_y$.

À cause de la propriété universelle, deux pushouts des morphismes f_x, f_y sont isomorphes.

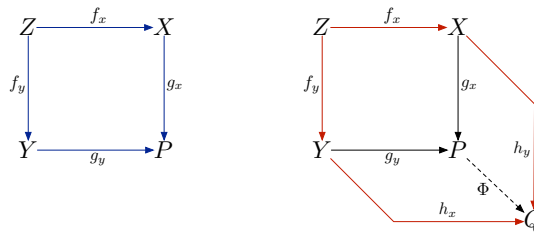


FIGURE 24: Sur la définition du pushout (P, g_x, g_y) des morphismes $f_x : Z \rightarrow X$, $f_y : Z \rightarrow Y$: Il consiste d'un objet P et morphismes $g_x : X \rightarrow P$, $g_y : Y \rightarrow P$ tels que le diagramme bleu à gauche commute, et tels que, si le sous-diagramme rouge à droite commute, alors il existe un morphisme unique $\Phi : P \rightarrow Q$ tel que le diagramme à droite commute.

3.5.4 Définition: Produit libre amalgamé

Soient F, G_1, G_2 trois groupes et $f_k : F \rightarrow G_k$, $k = 1, 2$ morphismes de groupes. Le **produit libre amalgamé des G_1, G_2 le long de F** est le le pushout des morphismes de groupes f_1, f_2 , c'est à dire le groupe $G_1 \star_F G_2$ avec morphismes $g_k : G_k \rightarrow G_1 \star_F G_2$, $k = 1, 2$ qui satisfont :

1. La commutativité du diagramme, c'est-à-dire $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$.
2. La **propriété universelle** : Pour tout groupe H et homomorphismes $h_k : G_k \rightarrow H$ tels que $h_1 \circ f_1 = h_2 \circ f_2$, il existe un unique morphisme $h : G_1 \star_F G_2 \rightarrow H$ tel que $h_k = h \circ g_k$, $k = 1, 2$.

L'universalité ci-dessus définit $G_1 \star_F G_2$ de manière unique à isomorphisme près. L'existence est montré ci-dessous dans 3.5.5.

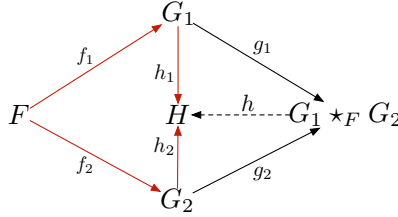


FIGURE 25: Sur l'universalité du produit libre amalgamé des G_1, G_2 le long de F . Pour tous morphismes $h_k : G_k \rightarrow H$ tels que le sous-diagramme rouge commute, il existe un unique morphisme $h : G_1 \star_F G_2 \rightarrow H$ tel que tout le diagramme commute.

Remarque :

1. Si $g_k(F) = \{0\}$, $k = 1, 2$, alors le produit libre amalgamé est en fait le produit libre, c'est-à-dire

$$G_1 \star_F G_2 \cong G_1 \star G_2 .$$

2. Si $G_2 = \{0\}$ alors par remarque 3.5.2(iii) $G_1 \star G_2 \cong G_1$. De plus, par définition 3.5.4, l'universalité du produit libre amalgamé se traduit à l'universalité A.0.14 de groupes quotients dans G_1 et on trouve

$$G_1 \star_F G_2 \cong G_1 / \langle f_1(F) \rangle_{\text{nor}} ,$$

où $\langle f_1(F) \rangle_{\text{nor}}$ est le plus petit sous-groupe normale dans G_1 contenant l'image $f_1(F)$.

3.5.5 Lemme : Représentation du produit libre amalgamé

Soient F, G_1, G_2 trois groupes et $f_k : F \rightarrow G_k$, $k = 1, 2$ morphismes de groupes. On considère tout élément des G_1, G_2 plongé dans leur produit libre $(G_1 \star G_2, \circ)$ comme décrit dans 3.5.1. Soit $N := \langle \{f_1(a)f_2(a)^{-1} : a \in F\} \rangle_{\text{nor}}$ le plus petit groupe normal dans $G_1 \star G_2$ contenant $\{f_1(a)f_2(a)^{-1} : a \in F\}$. Alors

$$G_1 \star_F G_2 := G_1 \star G_2 / N$$

est une représentation du produit libre amalgamée des G_1, G_2 le long de F . Les morphismes $g_k : G_k \hookrightarrow G_1 \star_F G_2$ définis par $g_k(x) := (x) \circ N$, $x \in G_k$ s'appellent les **plongements canoniques** des G_1, G_2 dans leur produit libre amalgamé le long de F .

Deux mots $s, t \in G_1 \star G_2$ sont *égales* dans $G_1 \star_F G_2$, ssi ils diffèrent à droite par un mot dans $\langle \{f_1(a)f_2(a)^{-1} : a \in F\} \rangle_{\text{nor}}$. En particulier, tout $f_1(a)f_2(a)^{-1}$ est considéré comme *trivial* dans $G_1 \star_F G_2$.

3.5.6 Théorème de Van Kampen

Soient U_1, U_2 sous-espaces d'un espace topologique U , tels que U est l'union des intérieurs des U_1, U_2 . On suppose que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ et $U_1, U_2, U_1 \cap U_2$ sont tous connexes par arcs.

Soient $f_k : U_1 \cap U_2 \hookrightarrow U_k$, $k = 1, 2$ les inclusions de l'intersection $U_1 \cap U_2$ dans U_1 et U_2 . Soit $x_0 \in U_1 \cap U_2$ quelconque. Soient $f_{k*} : \Pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \rightarrow \Pi_1(U_k, x_0)$, $k = 1, 2$ les morphismes de groupes induits par f_1, f_2 . Alors, U est aussi connexe par arcs et son groupe fondamental est donné par le produit libre amalgamé des $\Pi_1(U_1, x_0)$ et $\Pi_1(U_2, x_0)$ le long de $\Pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)$:

$$\Pi_1(U_1 \cup U_2, x_0) \cong \Pi_1(U_1, x_0) \star_{\Pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)} \Pi_1(U_2, x_0) \quad .$$

Preuve : Voir [4].

Remarques :

- (i) Si le groupe fondamental de l'intersection $U_1 \cap U_2$ est trivial (si par exemple $U_1 \cap U_2$ serait contractile), alors par remarque 3.5.4(1) :

$$\Pi_1(U_1 \cup U_2) \cong \Pi_1(U_1) \star \Pi_1(U_2) \quad .$$

- (ii) Si $\Pi_1(U_2) = \{0\}$, par remarque 3.5.4(2) on trouve

$$\Pi_1(U_1 \cup U_2) \cong \Pi_1(U_1) / \underbrace{\langle f_{1*}[\Pi_1(U_1 \cap U_2)] \rangle}_{\substack{\text{sous-groupe normale} \\ \text{dans } \Pi_1(U_1) \text{ engendré} \\ \text{par } f_{1*}[\Pi_1(U_1 \cap U_2)]}}_{\text{nor}} \quad .$$

3.6 Revêtements universels

3.6.1 Définition: Revêtement universel

Un revêtement (C, p) d'un espace topologique est dit **universel** ssi C est connexe par arcs, localement connexe par arcs et $\Pi_1(C) = \{0\}$.

Exemples :

- (i) Le revêtement $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $p(t) := \exp[2\pi it]$ est universel.
(ii) L'application quotient $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ est un revêtement universel du tore $T^2 := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

Remarques : Soit $p : C \rightarrow Y$ universel. Alors :

- (i) Par 3.4.2 p est galoisien.
(ii) Par 3.3.9 $\text{Aut}(p) \cong \Pi_1(Y)$. L'isomorphisme $\Phi : \Pi_1(Y) \rightarrow \text{Aut}(p)$ sous-jacent est de la structure suivante : Choisir $c_0 \in C$. Alors, pour $[\gamma]_{hs} \in \Pi_1(Y, p(c_0))$ poser $\Phi([\gamma]_{hs}) \in \text{Aut}(p)$ comme l'unique automorphisme satisfaisant $\Phi([\gamma]_{hs})(c_0) = c_0 \cdot [\gamma]_{hs}$.

3.6.2 Théorème : Caractérisation des revêtements simplement connexes

Soit Y un espace topologique et (C, p) un revêtement de Y . On suppose que C est connexe par arcs. Soit $c_0 \in C$ quelconque. Alors, il y a équivalence entre :

1. C est simplement connexe.
2. Pour deux chemins $\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1 : [0, 1] \rightarrow C$ d'origine c_0 et de même extrémité, les chemins $p(\tilde{\gamma}_0)$, $p(\tilde{\gamma}_1)$ dans Y sont strictement homotopes.

Preuve :

- 1 $\Rightarrow$ 2 : Soient $\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1$ chemins dans C de même origine et extrémité. Par lemme 2.3.5, ils sont strictement homotopes. Donc, leur images $p(\tilde{\gamma}_0), p(\tilde{\gamma}_1)$ sont également.
2 $\Rightarrow$ 1 : Soient $\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1$ chemins dans C de même origine et extrémité. Par 3.2.1(1), l'homotopie stricte des chemins $p(\tilde{\gamma}_0), p(\tilde{\gamma}_1)$ implique l'homotopie stricte de leurs revêtements $\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1$. Par lemme 2.3.5, cela implique que C est simplement connexe.

□

3.6.3 Théorème : Universalité du revêtement universel

Soit Y un espace topologique et (C, p) un revêtement de Y . On suppose que C est connexe par arcs, localement connexe par arcs et qu'il existe un revêtement universel de Y . Alors, il y a équivalence entre :

1. (C, p) est universel, c'est-à-dire C est simplement connexe.
2. (C, p) satisfait la propriété **universelle** : Pour tout revêtement (C_0, p_0) de Y il existe un revêtement $\tilde{p}_0 : C \rightarrow C_0$ de C_0 par C tel que $p = p_0 \circ \tilde{p}_0$.

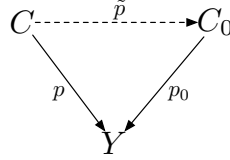


FIGURE 26: Sur l'universalité d'un revêtement universel : Il existe un revêtement $\tilde{p} : C \rightarrow C_0$ tel que le diagramme commute.

Preuve :

1 $\Rightarrow$ 2 : Soient $c \in C$, $c_0 \in C_0$ tels que $p(c) = p_0(c_0)$. Car (C, p) est universel, on a

$$p_* [\Pi_1(C, c)] = \{0\} \leq p_{0*} [\Pi_1(C_0, c_0)] .$$

Donc, par théorème 3.3.1 il existe une continue $\tilde{p} : (C, c) \rightarrow (C_0, c_0)$ telle que $p = p_0 \circ \tilde{p}$. Il reste à montrer que $(C, \tilde{p})$ est un revêtement de Y . Soit $y \in Y$ quelconque. Car p_0 et p sont revêtements de Y , on peut choisir un voisinage $V \subseteq Y$ de y trivialisant par rapport à p_0 et p respectivement, on peut supposer qu'ils sont connexes par arcs ¹⁵. Alors, tout point $x \in U^j$ dans un feuillet U^j est envoyé par $\tilde{p}$ dans un feuillet U_0^i car $\tilde{p}(x) \in p_0^{-1}(V)$. En fait, car les $(U^j)_j$ sont connexes, tout U^j est envoyé dans un seul feuillet U_0^i . Donc on peut écrire

$$p|_{U^j} = p|_{U_0^i} \circ \tilde{p}|_{U^j}$$

et donc

$$\tilde{p}|_{U^j} = p|_{U_0^i}^{-1} \circ p|_{U^j} : U^j \rightarrow U_0^i : \text{homéomorphisme ,}$$

ça veut dire $\tilde{p} : C \rightarrow C_0$ est un homéomorphisme locale, donc un revêtement.

2 $\Rightarrow$ 1 : On choisit (C_0, p_0) comme revêtement universel et un revêtement $\tilde{p} : C \rightarrow C_0$. Choisis $c \in C$ quelconque, alors par 3.2.1(2) l'homomorphisme $\tilde{p}_* : \Pi_1(C, c) \rightarrow \Pi_1(C_0, \tilde{p}(c))$ est injectif. Par supposition $\Pi_1(C_0, \tilde{p}(c))$ est trivial, donc $\Pi_1(C, c)$ est aussi et (C, p) est universel.

□

Interprétation : Soit (C, p) un revêtement universel de Y et (C_0, p_0) un revêtement de Y quelconque. La preuve de ce théorème a montré que pour trivialisants assez petits dans Y , les feuillets du revêtement universel (C, p) s'envoient un par un homéomorphiquement sur les feuillets de (C_0, p_0) . Autrement dit, le revêtement universel de Y est assez grand de couvrir tout autre revêtement.

3.6.4 Lemme : Unicité du revêtement universel

Les revêtements universels d'un espace topologique forment une classe d'équivalence de revêtements.

14. Prends l'intersection des deux trivialisants par rapport à p et p_0 .

15. Sinon, choisir $\tilde{c} \in p^{-1}(y)$ quelconque dans le feuillet U^{j_0} et prends un voisinage $\tilde{U} \subseteq U^{j_0}$ de $\tilde{c}$ connexe par arcs. Alors, car tous les feuillets $(U_0^i)_i, (U^j)_j$ sont homéomorphes à U^{j_0} , $\tilde{U}$ correspond à un voisinage de y trivialisant avec feuillets connexes par arcs.

Preuve : Supposer que (C_0, p_0) et (C_1, p_1) sont revêtements universels de Y . Choisir $c_0 \in C_0$ et $c_1 \in C_1$, alors $p_{0*} [\Pi_1(C_0, c_0)] = 0 = p_{1*} [\Pi_1(C_1, c_1)]$, donc par 3.3.7 les revêtements sont équivalents.

D'autre part, si un revêtement est équivalent à un revêtement universel, c'est claire qu'il est aussi un revêtement universel. □

3.6.5 Lemme sur revêtements universels et chemins

Soit Y un espace topologique et (C, p) un revêtement universelle de Y . Soit $c_0 \in C$ et

$$\Gamma := \{ [\gamma]_{hs} : \gamma : [0, 1] \rightarrow Y \text{ chemin d'origine } p(c_0) \} .$$

Alors, l'application $\Phi : C \rightarrow \Gamma$ donnée par $\Phi(c) := [p(\tilde{\gamma})]_{hs}$ où $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow C$ est un chemin reliant c_0 et c , est bien définie et en fait bijective.

Preuve : Par 2.3.5 et le fait que $\Pi_1(C) = 0$, tous chemins dans C reliant c_0 et c sont strictement homotopes, donc $\Phi : C \rightarrow \Gamma$ est bien définie. Elle est surjective car tout chemin dans Y d'origine $p(c_0)$ se relève par 3.1.7 à un chemin dans c_0 . Par 3.2.1(1) deux chemins strictement homotopes dans Y se relève à chemins strictement homotopes dans C , c'est-à-dire Φ est injectif. □

3.6.6 Definition: Relativement simplement connexe

Soit Y un espace topologique. Alors, une sous-partie $U \subseteq Y$ est dit **relativement simplement connexe dans** Y ssi elle est connexe par arcs et l'homomorphisme $i_* : \Pi_1(U) \rightarrow \Pi_1(Y)$ induit par l'inclusion $i : U \hookrightarrow Y$ est trivial, c'est-à-dire tout lacet dans U est contractile dans Y .

L'espace Y est dit **semi-localement simplement connexe**¹⁶ si tout point $y \in Y$ admet un voisinage V telle que tout lacet dans V est contractile dans Y .

Remarques :

- (i) Tout espace simplement connexe ou localement simplement connexe, est semi-localement simplement connexe. L'inverse n'est pas vrai.
- (ii) Soit Y localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. Alors, pour tout point $y \in Y$ et voisinage V de y , il existe un voisinage U relativement simplement connexe tel que $x \in U \subseteq V$. En particulier, ses ouverts relativement simplement connexes forment une base de la topologie de Y .
- (iii) De même comme 2.3.5, on peut prouver qu'une partie $U \subseteq Y$ connexe par arcs est relativement simplement connexe dans Y ssi tous chemins $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow U$ de même origine et même extrémité, sont strictement homotopes dans Y .

Exemples :

- Le tore $S^1 \times S^1$ est localement simplement connexe et donc semi-localement simplement connexe. Mais il n'est pas simplement connexe.
- Le boucle d'oreille de Hawaii est un espace qui n'est pas semi-localement simplement connexe.

3.6.7 Théorème : Existence des revêtements universelles

Soit Y un espace topologique connexe par arcs et localement connexe par arcs. Alors, il y a équivalence entre :

1. Y possède un revêtement universel.
2. L'espace Y est semi-localement simplement connexe.

¹⁶. Anglais : Semi-locally simply connected.

Preuve :

1 $\Rightarrow$ 2 : Soit $V \subseteq Y$ une ouverte trivialisant, $U \subseteq C$ un feuillet de V , $y_0 \in V$ quelconque et $c_0 \in p^{-1}(y_0) \cap U$. Soient $i : U \hookrightarrow C$ l'inclusion de U dans C et $j : V \hookrightarrow Y$ l'inclusion de V dans Y , alors

$$j \circ p|_U = p \circ i : (U, c_0) \rightarrow (Y, y_0)$$

où $p|_U : U \rightarrow V$ est un homéomorphisme. Par conséquence

$$j_* \circ (p|_U)_* = p_* \circ i_* : \Pi_1(U, c_0) \rightarrow \Pi_1(Y, y_0) \quad .$$

Car C est universel, il faut $i_* [\Pi_1(U, c_0)] = \{0\}$ et donc $j_* \circ (p|_U)_* [\Pi_1(U, c_0)] = \{0\}$. Car $p|_U : U \rightarrow V$ est un homéomorphisme, $(p|_U)_*$ est un isomorphisme, c'est-à-dire $(p|_U)_* [\Pi_1(U, c_0)] = \Pi_1(V, y_0)$. Donc $j_* [\Pi_1(V, y_0)] = \{0\}$. Autrement dit, tout lacet dans V est contractile dans Y .

$$\begin{array}{ccc} \Pi_1(U, c_0) & \xrightarrow[\text{trivial}]{i_*} & \Pi_1(C, c_0) \\ \downarrow (p|_U)_* \text{ isomorphe} & & \downarrow p_* \\ \Pi_1(V, y_0) & \xrightarrow{j_*} & \Pi_1(Y, y_0) \end{array}$$

FIGURE 27: Sur la preuve de théorème 3.6.7. Le diagramme ci-dessus commute.

2 $\Rightarrow$ 1 : Pour $y \in Y$ pose

$$\Gamma_y := \{ [\gamma]_{hs} : \gamma : [0, 1] \rightarrow Y \text{ chemin d'origine } y \} \quad .$$

On choisit un point $y_0 \in Y$ fixé. Pour ouverte $U \subseteq Y$ relativement simplement connexe dans Y pose

$$\Gamma_{y,U} := \{ [\gamma]_{hs} \in \Gamma_y, \gamma(1) \in U \} \quad .$$

Pour chemin $[\beta]_{hs} \in \Gamma_{y_0,U}$, pose

$$U_{[\beta]_{hs}} := \{ [\beta \otimes \gamma]_{hs} : \gamma \in \Gamma_{\beta(1)}, \gamma([0, 1]) \subseteq U \}$$

comme l'ensemble des *prolongements* de $[\beta]_{hs}$ dans U .

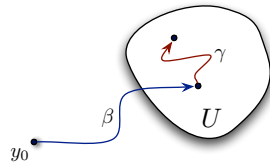


FIGURE 28: Sur la définition de $U_{[\beta]_{hs}}$.

Note que $U_{[\beta]_{hs}}$ est bien définie et satisfait ¹⁷ :

- (i) $U_{[\gamma]_{hs}} = U_{[\beta]_{hs}}$ pour tout chemin $[\gamma]_{hs} \in U_{[\beta]_{hs}}$.
- (ii) Si $U_{[\beta_0]_{hs}} \cap U_{[\beta_1]_{hs}} \neq \emptyset$ pour $\beta_0, \beta_1 \in \Gamma_{y_0,U}$, alors $U_{[\beta_0]_{hs}} = U_{[\beta_1]_{hs}}$.

On munit Γ_{y_0} de la plus petite topologie $\mathcal{O}$ contient

$$\mathcal{U} := \{ U_{[\beta]_{hs}} : U \subseteq Y \text{ ouverte, rel. simplement connexe, } \beta \in \Gamma_{y_0,U} \} \quad .$$

Alors, par A.0.13 la sous-base $\mathcal{U}$ est en fait une base de la topologie $\mathcal{O}$:

17. Se rappeler les remarques sur la composition des chemins à 2.3.2.

Car pur tout chemin $[\beta]_{hs} \in \Gamma_{y_0}$ il existe un voisinage U de $\beta(1)$ relativement simplement connexe dans Y , et donc $[\beta]_{hs} \in U_{[\beta]_{hs}}$, on sait que $\mathcal{U}$ est un recouvrement de Γ_{y_0} . Bien sûr $\Gamma_{y_0, Y} \subseteq \mathcal{U}$ et pour

$$U_{[\beta_0]_{hs}}^0, U_{[\beta_1]_{hs}}^1 \in \mathcal{U}, \quad [\gamma]_{hs} \in \left(U_{[\beta_0]_{hs}}^0 \cap U_{[\beta_1]_{hs}}^1 \right) =: V$$

il existe un $U_{[\beta]_{hs}} \in \mathcal{U}$ tel que $[\gamma]_{hs} \in U_{[\beta]_{hs}} \subseteq V$. Pour le voir, considères le voisinage $U^0 \cap U^1$ de $\gamma(1)$. Par remarque 3.6.6(ii) on peut trouver une ouverte U relativement simplement connexe telle que $\gamma(1) \in U \subseteq U^1 \cap U^2$. Alors, $[\gamma]_{hs} \in U_{[\gamma]_{hs}} \subseteq U_{[\gamma]_{hs}}^0 \cap U_{[\gamma]_{hs}}^1$. Par remarque (i) on a en fait $U_{[\gamma]_{hs}} \subseteq U_{[\beta_0]_{hs}}^0 \cap U_{[\beta_1]_{hs}}^1$.

L'application

$$p : \Gamma_{y_0} \rightarrow Y, \quad [\beta]_{hs} \mapsto \beta(1)$$

est surjective car Y est connexe par arcs. Son image réciproque d'un point $y \in Y$ n'importe quel est exactement $\{[\beta] \in \Gamma_{y_0} : \beta(1) = y\}$. Son image réciproque d'une ouverte relativement simplement connexe $U \subseteq Y$ est donnée par l'union

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{\substack{[\beta]_{hs} \in \Gamma_{y_0} \\ \beta(1) \in U}} U_{[\beta]_{hs}}$$

qui est par remarque (ii) une union des ouvertes disjointes (où égales). Par remarque 3.6.6(ii), tous ouverts relativement simplement connexes de Y forment une base de sa topologie, donc p est continue. Elle est aussi ouverte, car pour tout $U_{[\beta]_{hs}} \in \mathcal{U}$ on a $p(U_{[\beta]_{hs}}) = U$ parce que U est connexe par arcs.

Toute

$$p|_{U_{[\beta]_{hs}}} : U_{[\beta]_{hs}} \rightarrow U$$

où $[\beta]_{hs} \in \Gamma_{y_0}, \beta(1) \in U$, est surjective car U est connexe par arcs et injective car :

Soient $[\beta \otimes \gamma_k]_{hs} \in U_{[\beta]_{hs}}$, $k = 1, 2$ tels que $\beta(\gamma_1(1)) = \beta(\gamma_2(1))$. Par remarque 3.6.6(iii) et la connexité relative simple de U , on sait que γ_1 et γ_2 sont strictement homotopes. Donc $[\beta \otimes \gamma_1]_{hs} = [\beta \otimes \gamma_2]_{hs}$.

Car p est ouverte, la restriction $p|_{U_{[\beta]_{hs}}} : U_{[\beta]_{hs}} \rightarrow U$ est également, donc un homéomorphisme. Donc $p : \Gamma_{y_0} \rightarrow Y$ est un revêtement.

L'espace topologique Γ_{y_0} est connexe par arcs, car tout élément $[\beta]_{hs} \in \Gamma_{y_0}$ est relié à $[y_0]_{hs}$:

Pose

$$\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \Gamma_{y_0}, \quad \tilde{\gamma} \mapsto \tilde{\gamma}(t) := [\gamma(t)]_{hs}$$

où

$$\gamma(t) : [0, 1] \rightarrow Y, \quad \gamma(t)(s) := \beta(ts)$$

est le chemin *partiel* de β jusqu'à le temps t . Alors, sauf continuité, $\tilde{\gamma}$ est un chemin entre $[y_0]_{hs}$ et $[\beta]_{hs}$. Soit $t \in [0, 1]$ fixé et $U_{[\alpha]_{hs}} \in \mathcal{U}$ une ouverte contenant $[\gamma(t)]_{hs}$. Par remarque (i) on peut supposer $\alpha = \gamma(t) = (s \mapsto \beta(st))$. Car β est continue, il existe un voisinage $V_t \subseteq [0, 1]$ de t et un voisinage $V_s \subseteq [0, 1]$ de 1 tels que $\beta(V_s \cdot V_t) \subseteq U$, c'est-à-dire $(s \mapsto \beta(s \cdot \tau)) \in U_{[\gamma(t)]_{hs}}$ pour $\tau \in V_t$.

Pour montrer la connexité simple de $(\Gamma_{y_0}, \mathcal{O})$, on va utiliser la caractérisation 3.6.2 :

Soit $\beta : [0, 1] \rightarrow Y$ un chemin dans Y d'origine y_0 et $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Gamma_{y_0}$ son relèvement d'origine $[y_0]_{hs}$. On a vu ci-dessus, que ça c'est exactement le chemin

$$\tilde{\gamma} : t \mapsto \tilde{\gamma}(t) := [(s \mapsto \beta(ts))]_{hs}$$

car $p(\tilde{\gamma}(t)) = \beta(t)$. Autrement dit, l'extrémité du revêtement d'un chemin $\beta : [0, 1] \rightarrow Y$ d'origine $[y_0]_{hs}$ est toujours sa classe d'homotopie stricte $[\beta]_{hs}$. En particulier, revêtements avec la même extrémité, correspond à chemins de la même classe. Donc par 3.6.2 Γ_{y_0} est simplement connexe.

La connexité par arcs locale de Γ_{y_0} suit par 3.1.4 du fait que, $p : \Gamma_{y_0} \rightarrow Y$ est un revêtement d'un espace localement connexe par arcs. Donc, (Γ_{y_0}, p) est un revêtement universel de Y .

□

3.7 Fibrations

On se rappelle que par définition 3.1.9 une fibration $p : C \rightarrow Y$ est une continue qui satisfait la propriété de relèvements d'homotopies par rapport à tout espace topologique.

3.7.1 Équivalence d'homotopie de fibres

Soit Y un espace topologique connexe par arcs et $p : C \rightarrow Y$ une fibration de Y . Alors, tous fibres $p^{-1}(y)$ où $y \in Y$, sont homotopiquement équivalents.

Preuve : Vois [6], théorème 6.12.

3.7.2 Théorème : Propriété principale de fibrations

Soit Y un espace topologique connexe par arcs et $p : C \rightarrow Y$ une fibration de Y . Soient $c_0 \in C$ et $y_0 := p(c_0)$. Soit $F_0 := p^{-1}(y_0)$ le fibre de y_0 et $i : F_0 \hookrightarrow C$ l'inclusion de F_0 dans C . Alors,

$$\Pi_1(F_0, c_0) \xrightarrow{i_*} \Pi_1(C, c_0) \xrightarrow{p_*} \Pi_1(Y, y_0) \quad (3.7.2.1)$$

est une suite exacte courte (voir 4.1.2), c'est-à-dire $\text{image}(i_*) = \ker(p_*)$.

Interprétation : Les lacets $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow C$ basés en c_0 tels que $p(\tilde{\gamma}) \sim_{hs} y_0$, sont exactement ceux qui sont strictement homotopes à un lacet dans le fibre F_0 .

Preuve : Vois [6], théorème 6.29.

3.7.3 Définition: Fibré localement triviale

Soient C, Y et F espaces topologiques. Une **fibré localement triviale de C sur Y de fibre F** est une continue surjective $p : C \rightarrow Y$ avec une collection d'homéomorphismes $\{\varphi : U \times F \rightarrow p^{-1}(U)\}$ pour ouvertes $U \subseteq Y$ tel que :

1. Pour toute carte φ sur une ouverte $U \subseteq Y$ on a $\pi_U = p \circ \varphi$, où $\pi_U : U \times F \rightarrow U$ est la projection sur U .
2. Tout point $y \in Y$ possède un voisinage sur lequel il existe une carte.
3. Si φ est une carte sur l'ouverte $U \subseteq Y$ et $V \subseteq U$ est ouvert, alors la restriction $\varphi|_V$ est une carte sur V .

On dit Y la **base**, C l'**espace total** et F le **fibre**. L'ensemble $\{(U, \varphi) : \varphi \text{ carte de } U\}$ est dit **trivialisation locale du fibré**. Si de plus Y est homéomorphe à $Y \times F$, c'est-à-dire p est essentiellement la projection de $Y \times F$ sur Y , on dit le fibré **trivial**.

Remarque : Tout fibré localement trivial est une fibration de Y . Voir [7] pour plusieurs informations.

3.8 Exemples

3.8.1 L'espace projectif réel

Considérons l'**espace projectif réel** $\mathbb{RP}^n := S^n / (x \sim -x)$ munit de la topologie quotient. Alors :

1. L'espace projectif $\mathbb{RP}^n$ est homéomorphe à $B^n / \sim$, où B^n est la boule unité dans $\mathbb{R}^n$ et $x \sim -x$, $x \in \partial B^n$ est la relation d'équivalence identifiant les points antipodaux sur ∂B^n .
2. L'application quotient $p : S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$, $x \mapsto \{x, -x\} =: [x]$ est un revêtement galoisien de $\mathbb{RP}^n$ par S^n .
3. $\mathbb{RP}^1$ est homéomorphe à S^1 .
4. $\Pi_1(\mathbb{RP}^1) \cong \mathbb{Z}$ et $\Pi_1(\mathbb{RP}^n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour $n \geq 2$.

Preuve :

1. En identifiant les points antipodaux sur S^n on peut se restreindre sur l'hémisphère nord, en identifiant les points antipodaux sur l'équateur frontière. Car B^n est homéomorphe au hémisphère nord de S^n par projection, l'affirmation est prouvée.
2. Considérons l'action du groupe $G := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur S^n à gauche donnée par $0 : x \mapsto x$ et $1 : x \mapsto -x$. Alors G est un sous-groupe de homéomorphismes qui agit totalement discontinuement sur S^n et induit exactement $S^n/G = \mathbb{RP}^n$. Par 3.4.5 on sait que l'application quotient $p : S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ est un revêtement galoisien.
3. Considérons $S^1 \subseteq \mathbb{C}$. L'application $\mathbb{RP}^1 \rightarrow S^1$, $[z] \mapsto z^2$ est un homéomorphisme.
4. Soit $x \in S^n$ quelconque. Par 3.2.3(3), l'indice de $p_* [\Pi_1(S^n, x)]$ dans $\Pi_1(\mathbb{RP}^n, p(x))$ est égal au cardinal du fibre, c'est-à-dire 2. Pour $n \geq 2$ on sait que S^n est simplement connexe et donc $p_* [\Pi_1(S^n, x)] \cong \{0\}$. En particulier

$$\Pi_1(\mathbb{RP}^n, p(x)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad , \quad n \geq 2 \quad .$$

D'après (3) S^1 est homéomorphe à $\mathbb{RP}^1$, donc $\Pi_1(\mathbb{RP}^1) \cong \Pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

□

3.8.2 Les revêtements de S^1

On considère $S^1 \hookrightarrow \mathbb{C}$ et ses classes d'équivalence de revêtements. On connaît déjà les revêtements $p_\infty : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ et $p_n : S^1 \rightarrow S^1$, $n \in \mathbb{N}$ définies par $p_\infty(t) := e^{2\pi it}$ et $p_n(z) := z^n$. Alors :

1. Sous les revêtements connexes par arcs, ces sont les seules classes d'équivalence des revêtements de S^1 .
2. Tout revêtement de S^1 est galoisien.
3. $p_\infty : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ est le revêtement universel de S^1 .

Preuve :

1. La preuve utilise lemme 3.3.7¹⁸. Soit $s_0 \in S^1$ n'importe quel. On sait que $\Pi_1(S^1, s_0) \cong \mathbb{Z}$, donc il existe pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ un unique sous-groupe dans $\Pi_1(S^1, s_0)$ d'indice n . Soit (C, p) un revêtement de S^1 connexe par arcs et $c_0 \in p^{-1}(s_0)$. On sait que le sous-groupe $p_* [\Pi_1(C, c_0)] \leq \Pi_1(S^1, s_0)$ est cyclique et d'indice $n \in \mathbb{N}$ ou ∞ .

En premier cas, ce groupe est exactement $p_{n*} [\Pi_1(S^1, s_1)]$ où $s_1 \in p_n^{-1}(s_0)$. Donc, par lemme 3.3.7 les revêtements (C, p) et (S^1, p_n) sont équivalents.

En deuxième cas, le sous groupe $p_* [\Pi_1(C, c_0)]$ est le groupe trivial, donc égal à $p_{\infty*} [\Pi_1(\mathbb{R}, t_0)]$ où $t_0 \in p_\infty^{-1}(s_0)$. Donc, par lemme 3.3.7 les revêtements (C, p) et $(\mathbb{R}, p_\infty)$ sont équivalents.

2. Comme le groupe fondamental $\Pi_1(S^1)$ est abélien, tout son sous-groupe est normal. Par caractérisation 3.4.2(4) des revêtements galoisiens, suit l'affirmation.
3. Suit de définition 3.6.1, car $\mathbb{R}$ est simplement connexe.

□

3.8.3 Fonctions de degré 2 sur S^1

Soit $f : S^1 \rightarrow S^1$ continue de degré 2. Alors, f possède un point fixe dans S^1 .

Preuve : On considère $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. On considère le relèvement $\tilde{f}$ de f par le revêtement $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $t \mapsto t + \mathbb{Z}$. Car f est de degré 2 il faut $\tilde{f}(1) = \tilde{f}(0) + 2$. En particulier, car $\tilde{f}$ est continue, son graphe $(x, \tilde{f}(x))_{x \in (0,1)}$ coupe la droite $(x, x+1)_{x \in \mathbb{R}}$ dans un $x_0 \in [0, 1)$ (voir figure 29). Cela implique $\tilde{f}(x_0) = x_0 + 1$, c'est-à-dire $f(x_0) = p(\tilde{f}(x_0)) = \tilde{f}(x_0) + \mathbb{Z} = x_0 + \mathbb{Z}$.

¹⁸. Note que par 3.1.4 tout revêtement de S^1 est localement connexe par arcs.

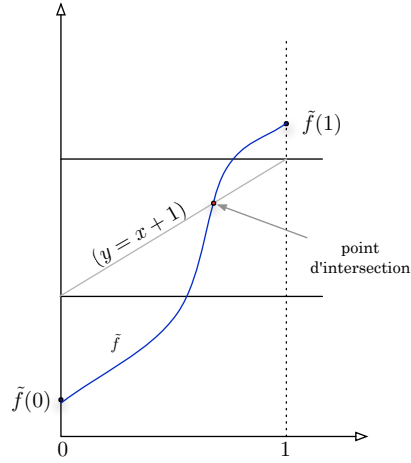


FIGURE 29: Sur la preuve de théorème 3.8.3. Le graphe de $\tilde{f}$ coupe le graphe de $x \mapsto (x + 1)$ dans un $x_0 \in [0, 1)$.

3.8.4 Le lemniscate de Bernoulli

Considérons le lemniscate $\mathcal{H} := (S^1 - 1) \cup (S^1 + 1) \hookrightarrow \mathbb{C}$, montré dans figure 30.

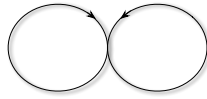


FIGURE 30: Le lemniscate de Bernoulli.

Alors, un revêtement $p : C \rightarrow \mathcal{H}$ est donné dans figure 31. Les permutations du fibre préservant l'action de $\Pi_1(\mathcal{H})$ sont exactement les *translations* entiers de l'espace étalé, c'est-à-dire pour tout $y \in \mathcal{H}$ on a $\text{Sym}_p(y) \cong \mathbb{Z}$ (vois 3.3.8) et donc $\text{Aut}(p) \cong \mathbb{Z}$. Bien sur $\text{Aut}(p)$ agit transitivement sur les fibres et donc par 3.4.3 on a

$$\text{Aut}(p) \cong \Pi_1(\mathcal{H})/p_*[\Pi_1(C)] \quad .$$

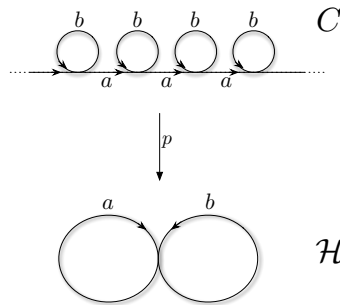


FIGURE 31: Revêtement du lemniscate.

Revêtements alternatifs sont montrés dans figure 32. Car leurs fibres sont de cardinal 2, par 3.4.4 ils sont galoisiens aussi.

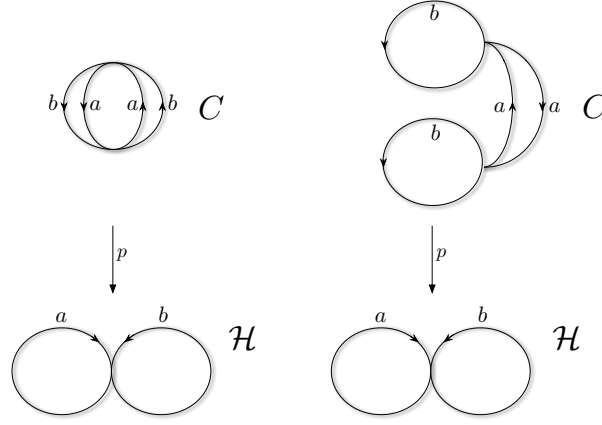


FIGURE 32: Revêtements alternatifs du lemniscate.

Finalement, par le théorème de Van Kampen 3.5.6 le groupe fondamental du lemniscate est donné par

$$\Pi_1(\mathcal{H}) \cong \Pi_1(S^1) \star \Pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \star \mathbb{Z} .$$

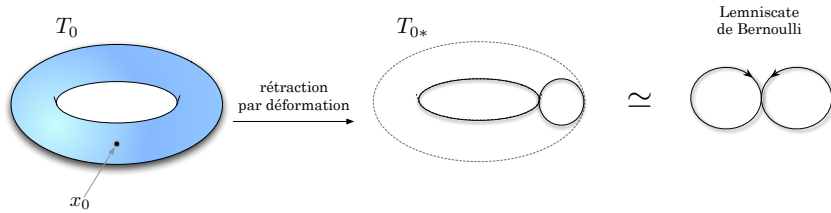
3.8.5 Exemple : Groupe fondamental du tore avec un trou

Considérons le tore $T := \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ avec l'application quotient $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ comme revêtement. Soit $x_0 \in p[(0, 1)^2]$ n'importe quel et $T_0 := T \setminus \{x_0\}$. Alors $\Pi_1(T_0) \cong \Pi_1(\text{lemniscate})$.

Preuve : Soit $C_0 := p^{-1}(T_0) = \mathbb{R}^2 \setminus p^{-1}(x_0)$, alors par remarque 3.1.1(iii) la restriction $p|_{C_0} : C_0 \rightarrow T_0$ est un revêtement de T_0 . Soit $T_{0*} := p(\partial[0, 1]^2)$ et $C_{0*} := p^{-1}(T_{0*})$. Alors, C_{0*} est une rétracte de C_0 par déformation, avec une homotopie de rétracte qui envoie points du même fibre sur points du même fibre. Donc, par lemme 3.1.3 T_{0*} est aussi une rétracte par déformation dans T_0 . Par lemme 2.3.8 cela implique

$$\Pi_1(T_0) \cong \Pi_1(T_{0*}) .$$

D'autre part, c'est évident que T_{0*} est homéomorphe au lemniscate de Bernoulli.

FIGURE 33: Rétraction du tore avec la trou x_0 au lemniscate de Bernoulli.

Par conséquence

$$\Pi_1(T_0) \cong \Pi_1(T_{0*}) \cong \Pi_1(\text{lemniscate}) \stackrel{3.8.4}{\cong} \mathbb{Z} \star \mathbb{Z} .$$

Si de plus $T_{\text{in}} := p((0, 1)^2)$, alors

$$\Pi_1(T_0 \cap T_{\text{in}}) \cong \Pi_1(S^1 \times (0, 1)) \cong \Pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} . \quad (3.8.5.1)$$

Soit $i : (T_0 \cap T_{\text{in}}) \hookrightarrow T_0$ l'inclusion de $(T_0 \cap T_{\text{in}})$ dans T_0 . Soient a, b les générateurs de $\Pi_1(T_0) = \mathbb{Z} \star \mathbb{Z}$ correspondant aux lacets singes *orthogonaux*, c'est-à-dire avec relèvements dans $\mathbb{R} \times \{\text{const}\}$ et $\{\text{const}\} \times \mathbb{R}$. Alors l'homomorphisme $i_* : \Pi_1(T_0 \cap T_{\text{in}}) \rightarrow \Pi_1(T_0)$ induit par i envoie le générateur 1 de $\Pi_1(T_0 \cap T_{\text{in}}) \cong \mathbb{Z}$ (lacet au tour le trou x_0) au élément $aba^{-1}b^{-1}$ (voir figure 34).

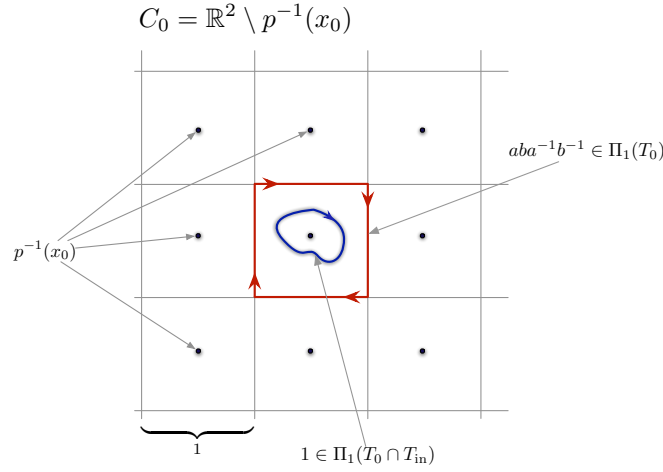


FIGURE 34: Sur le groupe fondamental de tore avec un trou x_0 . Le générateur de $\Pi_1(T_0 \cap T_{in})$ est envoyé par l'inclusion $i : (T_0 \cap T_{in}) \hookrightarrow T_0$ à $aba^{-1}b^{-1}$. Montrés sont en fait les relèvements des lacets par p .

Noter que par van Kampen 3.5.6 remarque (ii), on a

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\stackrel{2.4.6}{=} \Pi_1(T) = \Pi_1(T_0 \cup T_{in}) \stackrel{3.5.6(ii)}{\cong} \Pi_1(T_0) / \langle i_* [\Pi_1(T_0 \cap T_{in})] \rangle_{\text{nor}} \\ &\stackrel{(3.8.5.1)}{=} \Pi_1(T_0) / \langle i_*(\langle 1 \rangle) \rangle_{\text{nor}} = \Pi_1(T_0) / \langle aba^{-1}b^{-1} \rangle_{\text{nor}} . \end{aligned}$$

3.8.6 Théorème de la boule chevelue

Il n'existe pas de champ de vecteurs continu sur S^2 non-nul partout.

Preuve : On va montrer l'affirmation en plusieurs étapes.

Proposition : Le groupe orthogonal spécial $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ est homéomorphe à l'espace projectif $\mathbb{RP}^3$.

Preuve : Par 3.8.1(1) il suffit de montrer l'homéomorphie entre $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ et $B^3 / \sim = \mathbb{RP}^3$ où $x \sim -x$ pour $x \in \partial B^n$. Pour $x \in B^3$ pose $M(x) \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$ telle que M est la rotation au tour l'axe orientée x par l'angle $\pi \cdot \|x\|$ si $x \neq 0$ et $M(0) := \text{Id}$. Note que si $x \in \partial B^n$ on a $M(x) = M(-x)$, c'est-à-dire l'application $B^3 / \sim \rightarrow \text{SO}_3(\mathbb{R})$, $x \mapsto M(x)$ est bien définie. Elle est continue, ouverte injective et en fait surjective, donc un homéomorphisme.

Par 3.8.1(4) cela implique

$$\Pi_1(\text{SO}_3(\mathbb{R})) \cong \Pi_1(\mathbb{RP}^3) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} . \quad (3.8.6.1)$$

Supposer que $V : S^2 \rightarrow TS^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ est un champ de vecteurs sur S^2 non-nul partout. Alors, l'espace $S^2 \times \text{SO}_2(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\text{SO}_3(\mathbb{R})$.

Preuve : Par normalisation on peut supposer que $\|V\| = 1$. On définit la continue injective $\sigma : S^2 \rightarrow \text{SO}_3(\mathbb{R})$ comme

$$\sigma : x \mapsto \begin{pmatrix} | & | & | \\ V(x) & x \times V(x) & x \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

et la continue surjective $\tau : \text{SO}_3(\mathbb{R}) \rightarrow S^2$ comme $\tau : M \mapsto \nu$, où

$$\nu := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in S^2$$

est le pôle nord. Alors, $\sigma(x)$ est pour $x \in S^2$ une matrice de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ qui envoie le pôle nord ν sur x , c'est-à-dire $\tau \circ \sigma = \mathrm{Id}_{S^2}$. De cela on déduit que l'application

$$f : S^2 \times \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \quad , \quad f : (x, A) \mapsto \sigma(x) \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est continue, bijective avec l'inverse

$$f^{-1} : M \mapsto \left(\tau(M), [\sigma(\tau(M))]^{-1} M \right) \quad , \quad M \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$$

En fait si $M \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, alors $\sigma(\tau(M))$ est une matrice de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ qui envoie ν sur $M\nu$. Donc $[\sigma(\tau(M))]^{-1} M$ préserve ν , c'est-à-dire est de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Évidemment

$$f\left(\tau(M), [\sigma(\tau(M))]^{-1} M\right) = M.$$

Cela implique

$$\Pi_1(\mathrm{SO}(3)) \cong \Pi_1(S^2 \times \mathrm{SO}(2)) \cong \underbrace{\Pi_1(S^2)}_{\substack{\{0\} \\ \text{par 2.4.7}}} \times \underbrace{\Pi_1(\mathrm{SO}(2))}_{\substack{\cong \mathbb{Z} \\ \text{car } \mathrm{SO}(2) \simeq S^1}} \cong \mathbb{Z} \quad , \quad (3.8.6.2)$$

une contradiction à (3.8.6.1).

□

4 La cohomologie de de Rham

4.1 Complexes de cochaînes

4.1.1 Definition: Complexe de cochaînes

Un complexe de cochaînes $(M_i, f_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est la donnée d'une suite de groupes (modules) $\dots, M_i, M_{i+1}, \dots$ et morphismes de groupes (modules) $f_i : M_i \rightarrow M_{i+1}$, appelés **opérateurs de cobord**¹⁹, tels que $f_i(M_i) \subseteq \ker(f_{i+1})$, c'est-à-dire $f_{i+1} \circ f_i \equiv 0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. On note

$$\dots M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+2} \longrightarrow \dots$$

Les éléments des M_i s'appellent **cochaînes**²⁰. Les éléments du noyau $\ker(f_i)$ s'appellent des **cocycles**²¹, les éléments de l'image $f_i(M_i)$ s'appellent des **cobords**²². Donc, tout cobord est un cocycle. Les **groupes (modules) de cohomologie** du complexe $(M_i, f_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ sont²³

$$H^i(M) := \ker(f_i) / \text{image}(f_{i-1}) \quad , \quad i \in \mathbb{Z} \quad .$$

Un complexe de cochaînes **borné**²⁴, est un complexe de cochaînes dont presque tous les groupes (modules) sont triviaux. On note

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \longrightarrow 0 \quad . \quad (4.1.1.1)$$

4.1.2 Definition: Suite exacte

Une **suite exacte** est un complexe de cochaînes $(M_i, f_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ tel que $f_i(M_i) = \ker(f_{i+1})$. Souvent on considère des suites exactes bornées, notées comme dans (4.1.1.1). En particulier $\ker(f_1) = \{0\}$ et $f_{n-1}(M_{n-1}) = M_n$. On dit une suite

$$M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \quad .$$

des groupes M_i et morphismes f_i **exacte courte** si $\ker(f_{i+1}) = \text{image}(f_i)$ pour $i = 1, \dots, n-2$.

4.1.3 Formule de sommation des dimensions pour suites exactes

Soient $V_1, \dots, V_n$ $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie et

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} V_n \longrightarrow 0$$

une suite exacte de morphismes $\mathbb{K}$ -linéaires. Alors

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i \cdot \dim V_i = 0 \quad .$$

Preuve : On sait que $\dim V_i = \dim \ker(f_i) + \dim \text{image}(f_i)$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$ où $f_n : V_n \rightarrow \{0\}$ soit le morphisme triviale. Donc

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i \cdot \dim V_i = - \underbrace{\dim \ker(f_1)}_0 - \underbrace{\dim \text{image}(f_1)}_0 + \dots + (-1)^n \underbrace{\dim \ker(f_n)}_0 + (-1)^n \underbrace{\dim \text{image}(f_n)}_0 = 0 \quad .$$

Cela complète la preuve. □

19. Anglais : Boundary operators.

20. Anglais : Cochain.

21. Anglais : Cocycles.

22. Anglais : Coboundaries

23. On suppose que toute $\text{image}(f_{i-1})$ est normale dans $\ker(f_i)$.

24. Bounded cochain complex.

Remarques

(i) Soit

$$M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3$$

une suite exacte courte de morphismes d'espaces vectoriels. Si M_1 et M_3 sont de dimension finie, alors M_2 est également.

4.1.4 Lemme des cinq

Soient $A_1 \xrightarrow{\alpha_1} \dots \xrightarrow{\alpha_4} A_5$ et $B_1 \xrightarrow{\beta_1} \dots \xrightarrow{\beta_4} B_5$ suites exactes courtes de groupes et $\Phi_i : A_i \rightarrow B_i$, $i = 1, \dots, 5$ morphismes de groupes tels que le diagramme 35 ci-dessous commute. On suppose que Φ_2 et Φ_4 sont isomorphismes, Φ_1 un épimorphisme et Φ_5 un monomorphisme. Alors, Φ_3 est un isomorphisme.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & A_4 & \xrightarrow{\alpha_4} & A_5 \\
 \Phi_1 \downarrow & & \Phi_2 \downarrow & & \Phi_3 \downarrow & & \Phi_4 \downarrow & & \Phi_5 \downarrow \\
 B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & B_3 & \xrightarrow{\beta_3} & B_4 & \xrightarrow{\beta_4} & B_5
 \end{array}$$

FIGURE 35: Sur le lemme de cinq. Le diagramme commute.**4.1.5 Définition: Application de cochaînes**

Une **application de cochaînes** entre deux complexes de cochaînes $(M_i, f_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, $(\widetilde{M}_i, \widetilde{f}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est une suite $(\Phi_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de morphismes $\Phi_i : M_i \rightarrow \widetilde{M}_i$ qui est *compatible* avec les opérateurs de cobord, c'est-à-dire $\widetilde{f}_i \circ \Phi_i = \Phi_{i+1} \circ f_i$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. On écrit souvent $(\Phi_i)_i : (M_i, f_i)_i \rightarrow (\widetilde{M}_i, \widetilde{f}_i)_i$ ou même $\Phi : (M, f) \rightarrow (\widetilde{M}, \widetilde{f})$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \longrightarrow & M_{i-1} & \xrightarrow{f_{i-1}} & M_i & \xrightarrow{f_i} & M_{i+1} & \xrightarrow{f_{i+1}} \longrightarrow \\
 & \Phi_{i-1} \downarrow & & \Phi_i \downarrow & & \Phi_{i+1} \downarrow & \\
 \longrightarrow & \widetilde{M}_{i-1} & \xrightarrow{\widetilde{f}_{i-1}} & \widetilde{M}_i & \xrightarrow{\widetilde{f}_i} & \widetilde{M}_{i+1} & \xrightarrow{\widetilde{f}_{i+1}} \longrightarrow
 \end{array}$$

FIGURE 36: Sur la définition d'applications de cochaînes. Le diagramme commute.

Noter que tout Φ_i envoie cobords à cobords et cocycles à cocycles. De plus, application de cochaînes $(\Phi_i)_i : (M_i, f_i)_i \rightarrow (\widetilde{M}_i, \widetilde{f}_i)_i$ induit naturellement une famille de morphismes $\Phi_i : H^i(M) \rightarrow H^i(\widetilde{M})$ donnée par

$$\Phi_i : [x] \mapsto [\Phi_i(x)] \quad , \quad [x] \in \ker(f_i) / \text{image}(f_{i-1}) \quad , \quad i \in \mathbb{Z} \quad .$$

Si tout $\Phi_i : M_i \rightarrow \widetilde{M}_i$ est un isomorphisme, alors les morphismes induits $H^i(M) \rightarrow H^i(\widetilde{M})$ le sont également.

Preuve : On va montrer que $\Phi_i : H^i(M_i) \rightarrow H^i(\widetilde{M}_i)$ est bien définie. Note que si $x \in \ker(f_i)$, alors $\widetilde{f}_i \Phi_i x = \Phi_{i+1} f_i x = 0$, c'est-à-dire $\Phi_i(x) \in \ker(\widetilde{f}_i)$. De plus, si $y \in \ker(f_i)$ est tel que $[x] = [y]$ dans $\ker(f_i) / \text{image}(f_{i-1})$, alors $x - y = f_{i-1}(z)$ pour un $z \in M_{i-1}$. Donc $\Phi_i x - \Phi_i y = \Phi_i f_{i-1} z = \widetilde{f}_{i-1} \Phi_{i-1} z$, c'est-à-dire $[\Phi_i x] = [\Phi_i y]$ dans $\ker(\widetilde{f}_i) / \text{image}(\widetilde{f}_{i-1})$. Évidemment $\Phi_i : H^i(M) \rightarrow H^i(\widetilde{M})$ est un morphisme.

Supposons maintenant que tout Φ_i est isomorphe. Soit $x \in \ker(f_i)$ tel que $[\Phi_i x] = 0$, alors il existe un $z \in \widetilde{M}_{i-1}$ tel que $\widetilde{f}_{i-1} z = \Phi_i x$. Comme Φ_{i-1} est surjectif, il existe un $w \in M_{i-1}$ tel que $z = \Phi_{i-1} w$, et donc $\Phi_i x = \widetilde{f}_{i-1} \Phi_{i-1} w = \Phi_i f_{i-1} w$. Comme Φ_i est injectif, on en déduit $x = f_{i-1} w \in \text{image}(f_{i-1})$, c'est-à-dire $[x] = 0$ et

$\Phi_i : H^i(M) \rightarrow H^i(\widetilde{M})$ est injectif. Soit d'autre part $y \in \ker(\widetilde{f}_i)$ quelconque. Alors, comme Φ_i est surjectif il existe un $x \in M_i$ tel que $\Phi_i x = y$. Donc $0 = \widetilde{f}_i y = \widetilde{f}_i \Phi_i x = \Phi_{i+1} f_i x$ et comme Φ_{i+1} est injectif, $f_i x = 0$. Donc $x \in \ker(f_i)$ et $\Phi_i : H^i(M) \rightarrow H^i(\widetilde{M})$ est surjectif. $\square$

Remarque : Souvent on omet les indices des M_i, f_i, Φ_i et écrit $\Phi : M_i \rightarrow \widetilde{M}_i$ où même $\Phi : M \rightarrow \widetilde{M}$. Dans cette notation on a $\Phi \circ f = \widetilde{f} \circ \Phi$.

4.1.6 Définition: Suite exacte d'applications de cochaînes

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ soit $(M_n, f_n)_{i \in \mathbb{Z}}$ un complexe de cochaînes et $(\Phi_n, i)_{i \in \mathbb{Z}}$ une application de cochaînes entre $(M_n, f_n)_i$ et $(M_{n+1}, f_{n+1})_i$. Alors, la suite

$$\dots \xrightarrow{\Phi_{n-1}} (M_n, f_n) \xrightarrow{\Phi_n} (M_{n+1}, f_{n+1}) \xrightarrow{\Phi_{n+1}} \dots$$

est dit **suite exacte d'applications de cochaînes** ssi à chaque niveau $i \in \mathbb{Z}$ la suite

$$\dots \xrightarrow{\Phi_{n-1,i}} M_{n,i} \xrightarrow{\Phi_{n,i}} M_{n+1,i} \xrightarrow{\Phi_{n+1,i}} \dots$$

est exacte.

4.1.7 Théorème : Prolongation de suites exactes d'applications de cochaînes

Soient $(M_{1,i}, f_{1,i})_{i \in \mathbb{Z}}, (M_{2,i}, f_{2,i})_{i \in \mathbb{Z}}, (M_{3,i}, f_{3,i})_{i \in \mathbb{Z}}$ complexes de cochaînes et

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\Phi_1} M_2 \xrightarrow{\Phi_2} M_3 \longrightarrow 0$$

une suite exacte d'applications de cochaînes. Alors, il existe à chaque niveau $i \in \mathbb{Z}$ un morphisme

$$\delta^i : H^i(M_3) \rightarrow H^{i+1}(M_1)$$

tel que la suite

$$\dots \longrightarrow H^i(M_1) \xrightarrow{\Phi_{1,i}} H^i(M_2) \xrightarrow{\Phi_{2,i}} H^i(M_3) \xrightarrow{\delta^i} H^{i+1}(M_1) \longrightarrow \dots \quad (4.1.7.1)$$

est exacte.

Preuve :

- **Définition de δ^i :** On va omettre l'indice i de $\Phi_{1,i}$ et $\Phi_{2,i}$. Soit $\omega \in \ker(f_{3,i})$, alors, comme Φ_2 est surjectif il existe un $\widetilde{\omega} \in M_{2,i}$ tel que $\omega = \Phi_2 \widetilde{\omega}$. Donc $\Phi_2 f_{2,i} \widetilde{\omega} = f_{3,i} \Phi_2 \widetilde{\omega} = f_{3,i} \omega = 0$, donc $f_{2,i} \widetilde{\omega} \in \ker(\Phi_2) = \text{image}(\Phi_1)$. Comme Φ_1 est injectif, il existe un unique $\eta \in M_{1,i+1}$ tel que $\Phi_1 \eta = f_{2,i} \widetilde{\omega}$. Car

$$0 = f_{2,i+1} f_{2,i} \widetilde{\omega} = f_{2,i+1} \Phi_1 \eta = \Phi_1 f_{1,i+1} \eta \quad ,$$

on trouve par injectivité de Φ_1 que $f_{1,i+1} \eta = 0$, c'est-à-dire $\eta \in \ker(f_{1,i+1})$. On pose $\delta^i [\omega] := [\eta]$ où

$$[\omega] \in \ker(f_{3,i}) / \text{image}(f_{3,i-1}) \quad , \quad [\eta] \in \ker(f_{1,i+1}) / \text{image}(f_{1,i}) \quad .$$

$$\begin{array}{ccccccc}
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 \longrightarrow & M_{1,i-1} & \xrightarrow{\Phi_1} & M_{2,i-1} & \xrightarrow{\Phi_2} & M_{3,i-1} & \longrightarrow 0 \\
& \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & \\
0 \longrightarrow & M_{1,i} & \xrightarrow{\Phi_1} & M_{2,i} & \xrightarrow{\Phi_2} & M_{3,i} & \longrightarrow 0 \\
& \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & \\
0 \longrightarrow & M_{1,i+1} & \xrightarrow{\Phi_1} & M_{2,i+1} & \xrightarrow{\Phi_2} & M_{3,i+1} & \longrightarrow 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow &
\end{array}$$

FIGURE 37: Sur la preuve de théorème 4.1.7 : Tout $\omega \in \ker(f_{3,i}) \subseteq M_{3,i}$ se relève à un $\eta \in \ker(f_{1,i+1}) \subseteq M_{1,i+1}$. Posons $\delta^i[\omega] := [\eta]$.

- On va montrer que δ^i est bien définie. Supposons d'abord $\tilde{\omega}' \in M_{2,i}$ tel que $\omega = \Phi_2 \tilde{\omega}'$, alors de même façon on trouve qu'il existe un unique $\eta' \in \ker(f_{1,i+1}) \subseteq M_{1,i+1}$ tel que $\Phi_1 \eta' = f_{2,i} \tilde{\omega}'$. De plus $\tilde{\omega} - \tilde{\omega}' \in \ker(\Phi_2)$ et donc $\tilde{\omega} - \tilde{\omega}' = \Phi_1 \lambda$ pour un $\lambda \in M_{1,i}$. Donc

$$\Phi_1(\eta - \eta') = f_{2,i}(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') = f_{2,i} \Phi_1 \lambda = \Phi_1 f_{1,i} \lambda ,$$

et comme Φ_1 est injectif, $\eta - \eta' = f_{1,i} \lambda \in \text{image}(f_{1,i})$. Donc $[\eta] = [\eta']$ et $\delta^i[\omega]$ ne dépend pas du choix de $\tilde{\omega} \in \Phi_2^{-1}(\omega)$.

Supposons $\omega' \in \ker(f_{3,i-1})$ tel que $[\omega'] = [\omega]$, c'est-à-dire $\omega - \omega' \in \text{image}(f_{3,i-1})$. Alors il existe un $\lambda \in M_{3,i-1}$ tel que $\omega - \omega' = f_{3,i-1} \lambda$. Choisir $\tilde{\lambda} \in M_{2,i-1}$ tel que $\lambda = \Phi_2 \tilde{\lambda}$, alors $\Phi_2 f_{2,i-1} \tilde{\lambda} = f_{3,i-1} \Phi_2 \tilde{\lambda} = f_{3,i-1} \lambda$. Posons $\tilde{\omega}' := \tilde{\omega} - f_{2,i-1} \tilde{\lambda}$, alors

$$\Phi_2 \tilde{\omega}' = \underbrace{\Phi_2 \tilde{\omega}}_{\omega} - f_{3,i-1} \lambda = \omega' .$$

De plus

$$f_{2,i} \tilde{\omega}' = f_{2,i} \tilde{\omega} - \underbrace{f_{2,i} f_{2,i-1} \tilde{\lambda}}_0 = \Phi_1 \eta ,$$

donc par définition $\delta^i[\omega'] = [\eta] = \delta^i[\omega]$. On en déduit que δ^i est bien définie.

- Il reste à montrer que (4.1.7.1) est une suite exacte. Si $\omega \in \ker(f_{1,i})$, alors $\Phi_2 \Phi_1[\omega] = [\Phi_2 \Phi_1 \omega] = [0] = 0$. Inversement, soit $\omega \in \ker(f_{2,i})$ tel que $\Phi_2[\omega] = 0$, c'est-à-dire $\Phi_2 \omega \in \text{image}(f_{3,i-1})$ et donc $\Phi_2 \omega = f_{3,i-1} \eta$ pour un $\eta \in M_{3,i-1}$. Choisir $\tilde{\eta} \in M_{2,i-1}$ tel que $\Phi_2 \tilde{\eta} = \eta$, alors

$$\Phi_2(\omega - f_{2,i-1} \tilde{\eta}) = f_{3,i-1} \eta - \Phi_2 f_{2,i-1} \tilde{\eta} = f_{3,i-1} \eta - f_{3,i-1} \underbrace{\Phi_2 \tilde{\eta}}_{\eta} = 0 ,$$

c'est-à-dire $\omega - f_{2,i-1} \tilde{\eta} \in \ker(\Phi_2) = \text{image}(\Phi_1)$. Alors il existe un $\vartheta \in M_{1,i}$ tel que $\omega - f_{2,i-1} \tilde{\eta} = \Phi_1 \vartheta$, d'où on déduit

$$\Phi_1[\vartheta] = [\omega - f_{2,i-1} \tilde{\eta}] = [\omega] ,$$

donc $\ker \Phi_2 = \text{image} \Phi_1$ dans $H^i(M_2)$.

De façon similaire on montre que $\ker \delta^i = \text{image} \Phi_2$ dans $H^i(M_3)$ et $\ker \Phi_1 = \text{image} \delta^i$ dans $H^{i+1}(M_1)$. $\square$

4.1.8 Produit direct de complexes de cochaînes

Soit I un ensemble d'indices quelconque. Pour chaque $i \in I$ soit $(M_i, f_i) := (M_{i,k}, f_{i,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ un complexe de cochaînes. Alors, les groupes (modules) produits $M_k := \prod_{i \in I} M_{i,k}$ et les morphismes $f_k := (f_{i,k})_{i \in I}$ forment un complexe de cochaînes, noté $\prod_{i \in I} (M_i, f_i)$. Pour l'instant note $(M, f) := \prod_{i \in I} (M_i, f_i)$. Tout groupe (module) de

cohomologie $H^k(M) := \ker(f_k)/\text{image}(f_{k-1})$ est isomorphe au produit directe

$$\bigtimes_{i \in I} H^k(M_i) := \bigtimes_{i \in I} \ker(f_{i,k})/\text{image}(f_{i,k-1})$$

des groupes (modules) de cohomologie des $(M_{i,k}, f_{i,k})_k$, $i \in I$ via l'isomorphisme

$$\Pi_M : \bigtimes_{i \in I} H^k(M_i) \rightarrow H^k(M) \quad , \quad \Pi_M : ([\omega_i])_{i \in I} \mapsto [(\omega_i)_{i \in I}] \quad .$$

Soit $(G, g) := (G_k, g_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ aussi un complexe de cochaînes. Si pour tout $i \in I$, Φ_i est une application de cochaînes entre (G, g) et (M_i, f_i) , alors

$$(\Phi_i)_{i \in I} : (G, g) \rightarrow (M, f) \quad , \quad \underbrace{x}_{\in G_k} \mapsto \underbrace{(\Phi_i(x))_{i \in I}}_{\in M_k}$$

est aussi une application de cochaînes.

Inversement, pour tout $i \in I$ soit $(G_i, g_i) := (G_{i,k}, g_{i,k})_k$ un complexe de cochaînes et Φ_i une application de cochaînes entre (M_i, f_i) et (G_i, g_i) . Soit G le complexe de cochaînes produit des (G_i, g_i) . Alors, l'application

$$\Phi := (\Phi_i)_{i \in I} : M \rightarrow G \quad , \quad \underbrace{(\omega_i)_{i \in I}}_{\in \bigtimes_{i \in I} M_{i,k}} \mapsto \underbrace{(\Phi_i(\omega_i))_{i \in I}}_{\in \bigtimes_{i \in I} G_{i,k}}$$

est une application de cochaînes entre M et G . Soit $\overline{\Phi_i}$ le morphisme induit par Φ_i entre $H^{(\cdot)}(M_i)$ et $H^{(\cdot)}(G_i)$. Soit $\overline{(\Phi_i)}_i$ le morphisme induit par $(\Phi_i)_i$ entre $H^{(\cdot)}(M)$ et $H^{(\cdot)}(G)$. Alors le diagramme 38 ci-dessous commute.

$$\begin{array}{ccc} H^{(\cdot)}\left(\bigtimes_{i \in I} M_i\right) & \xrightarrow{\overline{(\Phi_i)_{i \in I}}} & H^{(\cdot)}\left(\bigtimes_{i \in I} G_i\right) \\ \Pi_M^{-1} \downarrow & & \uparrow \Pi_G \\ \bigtimes_{i \in I} H^{(\cdot)}(M_i) & \xrightarrow{(\overline{\Phi_i})_{i \in I}} & \bigtimes_{i \in I} H^{(\cdot)}(G_i) \end{array}$$

FIGURE 38: Sur des morphismes de cohomologies induits par applications de cochaînes entre produits de complexes de cochaînes. Le diagramme commute.

Exemples

- (i) Soient $(M, f) := (M_k, f_k)_k$, $(\widetilde{M}, \widetilde{f}) := (\widetilde{M}_k, \widetilde{f}_k)_k$ et $(G, g) := (G_k, g_k)_k$ complexes de cochaînes. Soient $\Phi : (M, f) \rightarrow (G, g)$ et $\widetilde{\Phi} : (\widetilde{M}, \widetilde{f}) \rightarrow (G, g)$ applications de cochaînes. Alors, les morphismes

$$\Psi_k := (\Phi + \widetilde{\Phi}) : M_k \times \widetilde{M}_k \rightarrow G_k \quad , \quad \Psi_k : (\omega_k, \widetilde{\omega}_k) \mapsto (\Phi(\omega) + \widetilde{\Phi}(\widetilde{\omega})) \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

forment une application de cochaînes entre le produit $(M, f) \times (\widetilde{M}, \widetilde{f})$ et (G, g) . Cela suit directement de la nature des morphismes.

- (ii) Soit

$$\dots \longrightarrow G_1 \xrightarrow{f_1} G_2 \xrightarrow{f_2} G_3 \longrightarrow \dots$$

un complexe de cochaînes (suite exacte). Soit $\Phi : G_2 \rightarrow \overline{G}_2$ un isomorphisme. Alors

$$\dots \longrightarrow G_1 \xrightarrow{\Phi \circ f_1} \overline{G}_2 \xrightarrow{f_2 \circ \Phi^{-1}} G_3 \longrightarrow \dots$$

est aussi un complexe de cochaînes (suite exacte).

4.2 Formes différentielles sur variétés

4.2.1 Definition: k -forme

Soit M une $\mathcal{C}^\infty$ -variété de dimension $n \in \mathbb{N}$. Soit $\mathcal{X}(M)$ l'espace linéaire des champs de vecteurs sur M et $\mathcal{F}(M)$ l'espace linéaire des fonctions réelles lisses sur M . Alors, une **k -forme** (ou **k -forme différentielle**) est une application $\omega : \underbrace{\mathcal{X} \times \cdots \times \mathcal{X}}_{\times k} \rightarrow \mathcal{F}$ antisymétrique, $\mathcal{F}$ -plurilinéaire. On note $\Omega^k(M)$ l'espace $\mathbb{R}$ -linéaire des k -formes sur M et $\Omega(M) := \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} \Omega^k(M)$.

Remarques : Soient $(x^i)_{i=1}^n$ les coordonnées locales sur M .

(i) Toute $\omega \in \Omega^k(M)$ peut être écrit comme combinaison $\mathcal{F}$ -linéaire des produits extérieurs des 1-formes dx^i :

$$\omega = \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \omega(\partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_k}) \cdot dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega(\partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_k}) \cdot dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} .$$

En particulier, toute n -forme est de la forme

$$\omega = f \cdot dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n , \quad f \in \mathcal{F} .$$

- (ii) Soient $\omega \in \Omega^k(M)$ et $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{X}$ champs de vecteurs n'importe lesquels. Alors, pour tout $x \in M$, la valeur $\omega(X_1, \dots, X_k)(x)$ ne dépende que des valeurs des champs $X_1, \dots, X_k$ dans le point x . En particulier, on peut regarder toute k -forme $\omega \in \Omega^k(M)$ comme application $\omega : M \rightarrow \Lambda^k T^*M$ sur M , qui envoie tout point $x \in M$ à une k -forme linéaire sur l'espace tangentiel $T_x M$.
- (iii) Pour $k > \dim(M)$ l'espace $\Omega^k(M)$ est trivial.

4.2.2 Definition: Dérivée extérieure

Soit M une $\mathcal{C}^\infty$ -variété de dimension $n \in \mathbb{N}$. Alors, la dérivée extérieure $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ est définie comme l'unique application $\mathbb{R}$ -linéaire satisfaisant :

1. Si $f \in \mathcal{F}(M)$, alors $df \in \Omega^1(M)$ est la différentielle de f , c'est-à-dire $df(X) := Xf$ pour $X \in \mathcal{X}(M)$.
2. Pour $f \in \mathcal{F}(M)$ on a toujours $d(df) = 0$.
3. Pour toute k -forme $\omega^k \in \Omega^k(M)$ et l -forme $\omega^l \in \Omega^l(M)$ on a

$$d(\omega^k \wedge \omega^l) = (d\omega^k) \wedge \omega^l + (-1)^k \cdot \omega^k \wedge d\omega^l .$$

Remarques : Soient $(x^i)_{i=1}^n$ coordonnées locales sur M .

- (i) C'est un fait que pour tout k -forme $\omega \in \Omega^k(M)$ on a $d(d\omega) = 0$ (lemme de Poincaré).
- (ii) Si $\omega \in \Omega^k(M)$ possède la représentation

$$\omega = \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in I} \omega_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

alors sa dérivée extérieure est donnée par

$$d\omega = \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in I} d\omega_{i_1, \dots, i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} .$$

- (iii) Pour $\omega \in \Omega^k(M)$ et champs de vecteurs $X_0, \dots, X_k \in \mathcal{X}$ on a la représentation invariante

$$\begin{aligned} d\omega(X_0, \dots, X_k) &= \sum_{i=1}^k (-1)^i X_i [\omega(X_0, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_k)] \\ &\quad + \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_k) , \end{aligned}$$

où $[\cdot, \cdot]$ est le crochet de Lie. En particulier, pour $\omega \in \Omega^1(M)$ on a

$$d\omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y])$$

si $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

4.2.3 Definition: k -forme pullback

Soient M, N deux $\mathcal{C}^\infty$ -variétés. Alors, toute $f : M \rightarrow N$ lisse induit une application $f^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$ via

$$(f^*\omega)|_x(v_1, \dots, v_k) := \omega|_{f(x)}(df_x(v_1), \dots, df_x(v_k)) \quad , \quad v_1, \dots, v_k \in T_x M, \quad x \in M, \quad \omega \in \Omega^k(N) \quad ,$$

où $df : TM \rightarrow TN$ et la différentielle de f . On dit la k -forme $f^*\omega$ **pullback** (ou **tiré en arrière**) de $\omega \in \Omega^k(N)$ via f .

Remarques :

- (i) Si $f : M \rightarrow N$ est un difféomorphisme, alors $f^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$ est un isomorphisme des espaces vectoriels avec inverse $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.
- (ii) Pour formes différentielles α, β sur N on a $f^*(\alpha \wedge \beta) = (f^*\alpha) \wedge (f^*\beta)$.
- (iii) Pour $\mathcal{C}^\infty$ -variétés M, N , lisse $f : M \rightarrow N$ et k -forme $\omega \in \Omega^k(N)$ on a $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$.
- (iv) Soit N une $\mathcal{C}^\infty$ -variété et $M \subseteq N$ une sous-variété de M avec l'inclusion $i : M \hookrightarrow N$. Alors, la *restriction* d'une k -forme $\omega \in \Omega^k(N)$ sur M est définie comme $\omega|_M := i^*\omega$. En particulier par (iii) :

$$d(\omega|_M) = (d\omega)|_M \quad .$$

4.2.4 Definition: Variété orientable

Une variété lisse M de dimension n est dit **orientable** s'il existe une n -forme $\omega \in \Omega^n(M)$ non-nulle partout [8]. Une telle forme est dit **forme d'orientation**. Deux formes d'orientation $\omega, \sigma \in \Omega^n(M)$ sont **équivalents** s'il existe une $f \in \Omega^0(M)$ positive partout telle que $\omega = f \cdot \sigma$. Une **orientation** de M est une classe d'équivalence de formes d'orientation sur M .

Remarques

- (i) C'est un fait, qu'il existe sur toute orientable M exactement deux orientations [8].
- (ii) On peut montrer que, toute variété lisse simplement connexe est orientable.

4.3 La cohomologie de de Rham

4.3.1 Definition: La cohomologie de de Rham

Soit M une $\mathcal{C}^\infty$ -variété de dimension $n \in \mathbb{N}$. Soit $d^k : \Omega^k(M) \xrightarrow{d} \Omega^{k+1}(M)$ la dérivée extérieure sur $\Omega^k(M)$. Alors, elle induit le **complexe de de Rham**

$$0 \longrightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d^0} \Omega^1(M) \xrightarrow{d^1} \dots \xrightarrow{d^{n-1}} \Omega^n(M) \xrightarrow{d^n} 0 \quad (4.3.1.1)$$

et la **cohomologie de de Rham** notée

$$H_{\text{dR}}^k(M) := \ker(d^k) / \text{image}(d^{k-1}) \quad , \quad 0 \leq k \leq n \quad .$$

On note ainsi

$$H_{\text{dR}}(M) := \bigoplus_{i=1}^{\infty} H_{\text{dR}}^i(M) \quad .$$

Une k -forme $\omega \in \Omega^k(M)$ est dit **fermée** ssi $d\omega = 0$. Elle est dit **exacte** ssi il existe une $(k-1)$ -forme $\alpha \in \Omega^{k-1}(M)$ telle que $\omega = d\alpha$.

Remarques :

- (i) Pour $k > n$ on a toujours $\Omega^k(M) = \{0\}$ et $H_{\text{dR}}^k(M) = \{0\}$.
- (ii) Par conséquence, toute n -forme est fermée et donc $H_{\text{dR}}^n(M) = \Omega^n(M)/d(\Omega^{n-1}(M))$.
- (iii) Par remarque 4.2.2(i) toute forme exacte est fermée et donc (4.3.1.1) un complexe de cochaînes.
- (iv) La cohomologie de de Rham sur M est triviale, c'est-à-dire $H_{\text{dR}}^k(M) = \{0\} \ \forall i$, ssi toute forme fermée est exacte.
- (v) Deux formes fermées $\omega, \vartheta \in \Omega^k(M)$ sont dit **cohomologues** ssi leur différence $(\alpha - \beta)$ est exacte. Cette relation est une relation d'équivalence sur $\Omega^k(M)$, dont les classes d'équivalence, dites **classes de cohomologie**, forment exactement la cohomologie $H_{\text{dR}}^k(M)$.
- (vi) Les 0-formes fermés sont exactement les fonctions localement constantes, c'est-à-dire constantes sur toute partie connexe de M . Évidemment, la seule 0-forme exacte est la nulle. Donc $H_{\text{dR}}^0(M) \cong \mathbb{R}^n$ si M possède n parties connexes.

4.3.2 Définition: La cohomologie à support compact

Soit M une $\mathcal{C}^\infty$ -variété. On note

$$\Omega_c^k(M) := \{\omega \in \Omega^k(M) : \text{supp}(\omega) \text{ compact}\}$$

l'espace $\mathbb{R}$ -linéaire des k -formes linéaires sur M de support compact. De même comme dans le cas de la cohomologie de de Rham, la dérivée extérieure d fait des $\Omega_c^k(M)$ un complexe de cochaînes

$$0 \longrightarrow \Omega_c^0(M) \xrightarrow{d} \Omega_c^1(M) \longrightarrow \dots \longrightarrow \Omega_c^n(M) \xrightarrow{d} 0$$

et induit la cohomologie $H_c^k(M)$, $k \in \mathbb{N}_0$.

4.3.3 Lemme de Poincaré

Soit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ une $\mathcal{C}^\infty$ -variété lisse-contractile dans $\mathbb{R}^n$ et $k \in \mathbb{N}$. Alors on a $H_{\text{dR}}^k(M) = \{0\}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Autrement dit, toute forme différentielle fermée est exacte.

Preuve : Voir [5].

4.3.4 Définition: Groupe abélianisé

Pour un groupe G , on note $[G, G]$ le sous-groupe normal de G engendré par les commutateurs de G , appelé **groupe dérivé**. On dit le groupe quotient $G^{\text{ab}} := G/[G, G]$ le groupe **abélianisé** de G .

Remarques

- (i) G^{ab} est le plus grand quotient abélien de G en le sens suivant : Pour tout $N \trianglelefteq G$ le quotient G/N est abélien ssi $[G, G] \leq N$.
- (ii) Si G est abélien, alors $G \cong G^{\text{ab}}$.
- (iii) Le groupe abélianisé de $\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}$ est $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
- (iv) L'espace $\mathbb{R}$ -linéaire $\text{Hom}(G^{\text{ab}}, \mathbb{R})$ des homomorphismes de G^{ab} dans $(\mathbb{R}, +)$ est $\mathbb{R}$ -isomorphe à $\text{Hom}(G, \mathbb{R})$ via le morphisme

$$(a : \bar{g} \mapsto a(\bar{g})) \mapsto (g \mapsto a(\bar{g})) \quad .$$

4.3.5 Théorème : La cohomologie de de Rham et le groupe fondamentale

Soit M une variété lisse connexe, de dimension $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$H_{\text{dR}}^1(M) \cong_{\mathbb{R}} \text{Hom}(\Pi_1(M), \mathbb{R}) .$$

Preuve : Sans élaborations, noter que par le théorème universel de coefficients[15], le *groupe de cohomologie* $H^k(M, \mathbb{R})$ de l'espace topologique M est isomorphe à $\text{Hom}(H_k(M, \mathbb{Z}), \mathbb{R})$, où $H_k(M, \mathbb{Z})$ est le k -ième *groupe d'homologie singulière de M à coefficients entiers*. Par le théorème de Hurewicz, si M est connexe par arcs, le groupe abélianisé $\Pi_1(M)^{\text{ab}}$ du groupe fondamental de M , est isomorphe à $H_1(M, \mathbb{Z})$. Par le théorème de de Rham[16, 17], $H_{\text{dR}}^k(M)$ est isomorphe à $H^k(M, \mathbb{R})$, donc

$$H_{\text{dR}}^1(M) \cong_{\mathbb{R}} \text{Hom}(\Pi_1(M)^{\text{ab}}, \mathbb{R}) .$$

D'après remarque 4.3.4(iv) la preuve est finie. □

4.3.6 Corollaire sur variétés simplement connexes

Soit M une $\mathcal{C}^\infty$ -variété simplement connexe. Alors $H_{\text{dR}}^1(M) = \{0\}$.

Preuve : Par 2.3.5 M possède un groupe fondamental trivial. Par 4.3.5 cela complète la preuve. □

4.4 Invariance de la cohomologie de de Rham

4.4.1 Définition: Variétés homotopiquement équivalentes

On dit deux $\mathcal{C}^\infty$ -variétés M, N **homotopiquement équivalentes** ssi il existe deux fonctions lisses $f : M \rightarrow N$ et $g : N \rightarrow M$ telles que $g \circ f \sim_h \text{Id}_M$ et $f \circ g \sim_h \text{Id}_N$ via homotopies lisses. Quelquefois les applications f, g sont appelées **équivalences d'homotopie** entre M et N .

Remarques :

- (i) L'équivalence d'homotopie est une relation d'équivalence entre les $\mathcal{C}^\infty$ -variétés.

4.4.2 Théorème : Invariance topologique de la cohomologie de de Rham

Soient M, N deux variétés lisses, homéomorphes²⁵ ou même seulement homotopiquement équivalentes. Alors, leurs cohomologies de de Rham sont égales. Autrement dit, la cohomologie de de Rham est une invariante de topologie et d'homotopie.

Remarques

- (i) Sans élaborations, soit noté qu'on peut montrer l'isomorphie entre $H_{\text{dR}}^k(M)$ et l'espace $\text{Hom}[H_k(M, \mathbb{Z}), \mathbb{R}]$, où $H_k(M, \mathbb{Z})$ est le k -ième *groupe d'homologie singulière de M à coefficients entiers*. Comme $H_k(M, \mathbb{Z})$ est une invariante topologique, $H_{\text{dR}}^k(M)$ est également. Comme $H_k(M, \mathbb{Z})$ est une invariante d'homotopie, $H_{\text{dR}}^k(M)$ est également.
- (ii) Si M, N sont variétés lisses, homotopiquement équivalentes comme espaces topologiques, alors tous ses groupes de cohomologie de de Rham $H_{\text{dR}}^k(M)$ (où $k \in \mathbb{N}$) sont égaux.
- (iii) Si M est une variété lisse, contractile, alors tous ses groupes de cohomologie de de Rham $H_{\text{dR}}^k(M)$ (où $k \in \mathbb{N}$) sont triviales. Noter comme on retrouve lemme 4.3.3 de Poincaré.

25. Noter : Pas impérativement difféomorphes !

4.4.3 Lemme : Applications de cohomologies de de Rham

Soient M, N $\mathcal{C}^\infty$ -variétés et $f : M \rightarrow N$ lisse. Alors l'application pullback $f^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$ induit une application de complexes de cochaines $f : (\Omega^k(N), d)_{i \in \mathbb{N}_0} \rightarrow (\Omega^k(M), d)_{i \in \mathbb{N}_0}$ et donc une famille de morphismes $\mathbb{R}$ -linéaires $f^* : H_{\text{dR}}^i(N) \rightarrow H_{\text{dR}}^i(M)$.

Preuve : Par remarque 4.2.3(iii) l'application pullback f^* commute avec la dérivée extérieure d . Par 4.1.5 suit l'affirmation. $\square$

4.4.4 Lemme de Poincaré sur homotopies et la cohomologie de de Rham

Soient M, N $\mathcal{C}^\infty$ variétés de même dimension et $h_0, h_1 : M \rightarrow N$ lisses. Par 4.4.3 les pullbacks h_0^*, h_1^* induisent pour tout $k \in \mathbb{N}_0$ des morphismes $\mathbb{R}$ -linéaires $f_0^*, f_1^* : H_{\text{dR}}^k(N) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(M)$. Si les h_0, h_1 sont homotopes par une homotopie lisse $M \times [0, 1] \rightarrow N$, alors $h_0^* = h_1^*$ sur la cohomologie $H_{\text{dR}}^{(\cdot)}(N)$.

Preuve : Voir [12], pp. 277.

Remarque : Une version du lemme de Poincaré 4.4.4 est que, l'homomorphisme

$$\pi^* : H_{\text{dR}}^k(M) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(M \times [0, 1])$$

induit par la projection $\pi : M \times [0, 1] \rightarrow M$ et un isomorphisme avec l'inverse

$$i_0^* : H_{\text{dR}}^k(M \times [0, 1]) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(M) ,$$

induit par l'inclusion $i_0 : M \rightarrow M \times [0, 1], x \mapsto (x, 0)$.

4.4.5 Corollaire : Invariance homotopique de la cohomologie de de Rham

Soient M, N deux variétés lisses, homotopiquement équivalentes comme espaces topologiques. Alors, leurs cohomologies $H_{\text{dR}}^k(M)$, $H_{\text{dR}}^k(N)$ de de Rham sont isomorphes.

Preuve : On va prouver l'affirmation seulement pour le cas que M, N sont de même dimension et homotopiquement équivalentes comme variétés lisses. Le cas général est déjà vu dans remarque 4.4.2(ii). Soient $f : M \rightarrow N$ et $g : N \rightarrow M$ équivalences d'homotopie, c'est-à-dire $f \circ g \sim_h \text{Id}_N$ et $g \circ f \sim_h \text{Id}_M$ via homotopies lisses. Par 4.1.5 et remarque 4.2.3(ii), $\text{Id}_N^* : H_{\text{dR}}^k(N) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(N)$ est un isomorphisme. Par Poincaré 4.4.4, le morphisme $(f \circ g)^* : H_{\text{dR}}^k(N) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(N)$ est aussi un isomorphisme. De même, on trouve que $(g \circ f)^* : H_{\text{dR}}^k(M) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(M)$ est un isomorphisme. Comme $(f \circ g)^* = f^* \circ g^*$ et $(g \circ f)^* = g^* \circ f^*$, on en déduit que f^* et g^* sont inverses et donc $f^* : H_{\text{dR}}^k(N) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(M)$ un isomorphisme. $\square$

4.5 Le théorème de Mayer-Vietoris

4.5.1 Théorème de Mayer-Vietoris

Soit M une $\mathcal{C}^\infty$ -variété et $U_1, U_2 \subseteq M$ sous-parties tels que M est l'union de leurs intérieurs. Soient $i_l : U_l \cap U_2 \hookrightarrow U_l$ et $j_l : U_l \hookrightarrow M$, $l = 1, 2$ les inclusions des espaces entre eux. Soient $i_l^* : \Omega(U_l) \rightarrow \Omega(U_1 \cap U_2)$ et $j_l^* : \Omega(M) \rightarrow \Omega(U_l)$ leurs morphismes pullbacks. Alors, la suite

$$\dots \longrightarrow H_{\text{dR}}^k(M) \xrightarrow{(j_1^*, j_2^*)} H_{\text{dR}}^k(U_1) \times H_{\text{dR}}^k(U_2) \xrightarrow{j_1^* - j_2^*} H_{\text{dR}}^k(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\delta} H_{\text{dR}}^{k+1}(M) \longrightarrow \dots$$

est exacte, pour un morphisme $\mathbb{R}$ -linéaire $\delta : H_{\text{dR}}^k(U_1 \cap U_2) \rightarrow H_{\text{dR}}^{k+1}(M)$ approprié.

Preuve : Notons que par 4.4.3 les i_l^*, j_l^* forment des applications de cochaînes entre les complexes de de Rham des espaces $U_1, U_2, U_1 \cap U_2$ et M . Par 4.1.8 et exemple 4.1.8(i) on sait que

$$\Omega^{(\cdot)}(M) \xrightarrow{(j_1^*, j_2^*)} \Omega^{(\cdot)}(U_1) \times \Omega^{(\cdot)}(U_2)$$

et

$$\Omega^{(\cdot)}(U_1) \times \Omega^{(\cdot)}(U_2) \xrightarrow{i_1^* - i_2^*} \Omega^{(\cdot)}(U_1 \cap U_2)$$

sont aussi des applications de cochaînes. Par 4.1.8 tout $H^k(U_1) \times H^k(U_2)$ est isomorphe à $H^k[\Omega^{(\cdot)}(U_1) \times \Omega^{(\cdot)}(U_2)]$ via un isomorphisme qui est compatible avec les morphismes de la cohomologie induits par les j_l^*, i_l^* . Donc, par exemple 4.1.8(ii) et théorème 4.1.7 il suffit de montrer que la suite d'applications de cochaînes

$$0 \longrightarrow \Omega^{(\cdot)}(M) \xrightarrow{(j_1^*, j_2^*)} \Omega^{(\cdot)}(U_1) \times \Omega^{(\cdot)}(U_2) \xrightarrow{i_1^* - i_2^*} \Omega^{(\cdot)}(U_1 \cap U_2) \longrightarrow 0$$

est exacte. Se rappeler que pour $\omega \in \Omega(M)$, $j_l^* \omega$ est rien autre que la restriction de ω sur le fibre tangent de U_l (similaire pour i_l). L'injectivité de (j_1^*, j_2^*) est claire comme M est l'union des intérieurs des U_1, U_2 . C'est aussi facile à voir que

$$\text{image}(j_1^*, j_2^*) = \ker(i_1^* - i_2^*) .$$

Il reste à montrer la surjectivité de $(i_1^* - i_2^*)$. Supposons $\omega \in \Omega^k(U_1 \cap U_2)$. Prolongeons ω sur $U_1 \cup U_2$. Alors

$$(i_1^* - i_2^*) : (\omega/2, -\omega/2) \mapsto \omega ,$$

ce qui complète la preuve. □

4.5.2 Théorème de Mayer-Vietoris sur formes de support compact

Soit M une $\mathcal{C}^\infty$ -variété et $U_1, U_2 \subseteq M$ tels que M est union de leurs intérieurs. Soient $i_l : U_1 \cap U_2 \hookrightarrow U_l$ et $j_l : U_l \hookrightarrow M$, $l = 1, 2$ les inclusions des espaces entre eux. Alors la suite

$$\dots \longrightarrow H_c^k(M) \xrightarrow{(j_1^*, j_2^*)} H_c^k(U_1) \times H_c^k(U_2) \xrightarrow{j_1^* - j_2^*} H_c^k(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\delta} H_c^{k+1}(M) \longrightarrow \dots$$

est exacte, pour un morphisme $\mathbb{R}$ -linéaire $\delta : H_c^k(U_1 \cap U_2) \rightarrow H_c^{k+1}(M)$ approprié.

Preuve : Similaire au théorème de Mayer-Vietoris originale 4.5.1.

4.5.3 Definition: Bon recouvrement

Un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ d'une variété lisse de dimension n est dit **bon**²⁶ ssi toute intersection finie des U_i est vide ou difféomorphe à $\mathbb{R}^n$ [18].

4.5.4 Théorème : Recouvrement bon de variétés

Soit M une variété lisse. Alors, il existe un bon recouvrement de M .

Preuve : Voir [18], page 42.

4.5.5 Théorème : Dimension finie de la cohomologie de de Rham

Si M est une variété lisse compacte, alors tout espace de cohomologie $H_{\text{dR}}^k(M)$ est de dimension finie.

26. Anglais : Good cover

Preuve :²⁷ Comme M est compacte, par 4.5.4 on peut choisir un bon recouvrement d'ouverts $(U_i)_{i=1}^m$ de M . Noter que toute intersection finie non-vide des U_i est contractile. On montre l'affirmation via récurrence sur la cardinalité m du recouvrement. En cas $m = 1$ la variété est lisse contractile, donc par remarque 4.4.2(iii) tous cohomologies $H_{\text{dR}}^k(M)$ sont de dimension finie. Supposons que l'affirmation est vraie pour toute cardinalité du recouvrement plus petite que m . Soit $U := \bigcup_{i=1}^{m-1} U_i$, alors $M = U \cup U_m$. Par Mayer-Vietoris 4.5.1 on a la suite exacte

$$\dots \longrightarrow H_{\text{dR}}^{k-1}(U \cap U_m) \longrightarrow H_{\text{dR}}^k(M) \longrightarrow H_{\text{dR}}^k(U) \times H_{\text{dR}}^k(U_m) \longrightarrow \dots$$

Noter que par l'hypothèse de récurrence $H_{\text{dR}}^k(U)$ et $H_{\text{dR}}^k(U_m)$ sont de dimension finie. Comme

$$U \cap U_m = \bigcup_{i=1}^{m-1} U_i \cap U_m$$

est l'union d'un recouvrement contractile, lisse de cardinalité $m-1$, aussi par récurrence $\dim H_{\text{dR}}^{k-1}(U \cap U_m) < \infty$. Donc, par remarque 4.1.3(i) $H_{\text{dR}}^k(M)$ est aussi de dimension finie. □

4.6 Cas spéciaux de cohomologies de de Rham

4.6.1 Lemme : Intégration de formes exactes

Soit M une variété lisse de dimension $n \in \mathbb{N}$, orientable. Soit $\eta \in \Omega_c^{n-1}(M)$ une $n-1$ -forme de support compact. Alors, l'intégral $\int_M d\eta$ est trivial.

Preuve : Voir [8], pp. 90.

Conséquences

- (i) La 1-forme $d\varphi$ (φ coordonnée locale canonique) sur S^1 n'est pas exacte car $\int_{S^1} d\varphi = 2\pi$, même si elle est fermée et localement exacte.
- (ii) La n -forme $d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_n$ sur le tore $T^n := \bigtimes_{i=1}^n S^1$ n'est pas exacte car $\int_{T^n} d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_n = (2\pi)^n$, même si elle est fermée.

4.6.2 Lemme : Cohomologies de compositions de variétés

Soit M une variété lisse de composants connexes $M_1, \dots, M_n$. Alors, sa cohomologie de de Rham est donnée par

$$H_{\text{dR}}^k(M) = \bigtimes_{i=1}^n H_{\text{dR}}^k(M_i) \quad .$$

4.6.3 Théorème : L'espace $H_{\text{dR}}^n(M)$ pour variétés non-compactes

Soit M une variété lisse non-compacte, connexe de dimension n (orientable ou pas). Alors

$$H_{\text{dR}}^n(M) = 0 \quad .$$

Preuve : Voir [12], pp. 272.

²⁷. Pour une preuve alternative voir [8], pp. 80.

4.6.4 Théorème : L'espace $H_c^n(M)$

Soit M une variété lisse, connexe de dimension n . Alors sa n -ième cohomologie de de Rham de support compact est donnée par

$$H_c^n(M) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & : M \text{ orientable} \\ 0 & : \text{sinon} \end{cases} . \quad (4.6.4.1)$$

Idée de preuve : On montre que si M est orientée, l'application

$$H_c^n(M) \rightarrow \mathbb{R} , \quad [\omega] \mapsto \int_M \omega$$

est bien définie et un isomorphisme des espaces vectoriels et si M n'est pas orientable, toute n -forme est exacte. Voir [8, 11, 12, 18] pour plus d'informations, en particulier [12] pp. 269 et pp. 272.

Remarques :

- (i) Si en particulier M est compacte, alors le théorème se traduit en : Il existe modulo les formes exactes et modulo multiplication par un facteur scalaire, exactement une n -forme non-exacte.
- (ii) Le théorème dit en particulier, que si M est compacte, orientable, connexe, alors toute $\omega \in \Omega^n(M)$ est exacte ssi $\int_M \omega$ est nul.
- (iii) Théorèmes 4.6.3 et 4.6.4 conduisent au résumé : Si M est une variété lisse, connexe de dimension n , alors

$$H_{\text{dR}}^n(M) = \begin{cases} \mathbb{R} & : M \text{ compact \& orientable} \\ 0 & : \text{sinon} \end{cases} .$$

4.6.5 Théorème : Dualité de Poincaré

Soit M une variété lisse de dimension $n \in \mathbb{N}$, orientable. Pour $k \in \{0, \dots, n\}$ on considère la forme bilinéaire

$$H_{\text{dR}}^k(M) \times H_c^{n-k}(M) \rightarrow \mathbb{R} , \quad ([\omega], [\eta]) \mapsto \int_M \omega \wedge \eta ,$$

Alors, l'homomorphisme induit

$$H_{\text{dR}}^k(M) \rightarrow H_c^{n-k}(M)^*$$

est en fait un isomorphisme. Par conséquence, on a l'isomorphie

$$H_{\text{dR}}^k(M) \cong_{\mathbb{R}} H_c^{n-k}(M)^* \quad (4.6.5.1)$$

Pour plus d'informations voir [18], pp. 44 et pp. 46.

Remarques

- (i) Supposer que la cohomologie $H_c(M)$ est de dimension finie²⁸. Alors, le théorème donne une correspondance entre la cohomologie de de Rham $H_{\text{dR}}(M)$ et $H_c(M)$.
- (ii) Le théorème montre qu'en général, les espaces $H_c^k(M)$ ne doivent pas être nécessairement de dimension plus petite que $H_{\text{dR}}^k(M)$, même si $\dim \Omega_c^k(M) \leq \dim \Omega^k(M)$. Par exemple, $H_c^n(\mathbb{R}^n) \cong_{\mathbb{R}} H_{\text{dR}}^0(\mathbb{R}^n) \cong_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$, même si $H_{\text{dR}}^n(\mathbb{R}^n) = 0$ par contractilité (voir remarque 4.4.2(iii)), ou bien par non-compacité de $\mathbb{R}^n$ (voir 4.6.3).

²⁸. Noter que le dual d'un espace vectoriel est de dimension finie ssi l'espace lui-même est de dimension finie. Dans ce cas, l'espace et son dual sont isomorphes.

En effet, l'application $H_c^n(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$[\omega] \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \omega \quad , \quad [\omega] \in H_c^n(\mathbb{R}^n)$$

est par 4.6.1 bien définie et un isomorphisme des espaces vectoriels. D'autre part, toute $\omega := f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$ est exacte, car $\omega = d\eta$ avec

$$\eta(x^1, \dots, x^n) := \left[\int_0^{x^1} f(y, x^2, \dots, x^n) dy \right] \cdot dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n \quad .$$

4.6.6 Corollaire de la dualité de Poincaré

Soit M une variété lisse de dimension $n \in \mathbb{N}$, compacte, orientable, connexe. Alors :

- a) $H_{\text{dR}}^k(M) \cong_{\mathbb{R}} H_{\text{dR}}^{n-k}(M)$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$.
- b) En particulier, $H_{\text{dR}}^n(M) \cong_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$. L'isomorphisme sous-jacent est donné par

$$[\omega] \mapsto \int_M \omega \quad .$$

4.6.7 Corollaire sur variétés contractiles

Soit M une variété lisse de dimension n , contractile. Alors tout groupe de cohomologie $H_c^k(M)$ avec $k \in \{0, \dots, n-1\}$ est trivial.

Preuve : Comme M est contractile, par 2.2.9 elle est simplement connexe. Par remarque 4.2.4(ii) elle est donc orientable. Par Poincaré 4.6.5 on a donc $H_c^k(M)^* \cong_{\mathbb{R}} H_{\text{dR}}^{n-k}(M)$ pour $k \in \{0, \dots, n\}$. Comme M est contractile, par remarque 4.4.2(iii) tout $H_{\text{dR}}^{n-k}(M)$, avec $k \in \{0, \dots, n-1\}$, est trivial. □

4.6.8 Théorème de Künneth : Produit de variétés

Soient M, N variétés lisses, compactes. Alors, leur produit $M \times N$ possède la cohomologie de de Rham

$$H_{\text{dR}}^k(M \times N) \cong \bigoplus_{p+q=k} H_{\text{dR}}^p(M) \otimes H_{\text{dR}}^q(N) \quad , \quad k \in \mathbb{N}_0$$

où $\otimes$ est le produit tensoriel des espaces.

4.6.9 Définition: Degré d'une application

Soient M, N deux variétés lisses de dimension n , compactes, orientables, connexes. Soit $f : M \rightarrow N$ une application lisse, induisant l'homomorphisme

$$f^* : H_{\text{dR}}^n(N) \rightarrow H_{\text{dR}}^n(M) \quad .$$

Par corollaire 4.6.6 on sait que $H_{\text{dR}}^n(M)$ et $H_{\text{dR}}^n(N)$ sont isomorphes à $\mathbb{R}$. Il existe donc un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$f^*[\omega] = \lambda[\omega] \quad \forall [\omega] \in H_{\text{dR}}^n(N) \quad .$$

On appelle $\lambda =: \text{dg}(f)$ le **degré** de f .

4.6.10 Théorème sur le degré des applications

Soient M, N deux variétés lisses de dimension n , compactes, orientables, connexes. Alors, le degré de toute application lisse $f : M \rightarrow N$ est dans $\mathbb{Z}$.

Idée de preuve : Se rappeler que par corollaire 4.6.6 l'espace $H_{\text{dR}}^n(M)$ est isomorphe à $\mathbb{R}$ via l'isomorphisme

$$[\omega] \mapsto \int_M \omega, \quad [\omega] \in H_{\text{dR}}^n(M)$$

(de même pour $H_{\text{dR}}^n(N)$). Donc,

$$\int_M f^* \omega = \text{dg}(f) \cdot \int_N \omega$$

pour toute $\omega \in \Omega^n(N)$. Par le théorème de Sard et la compacité de M , f possède une valeur *régulière* $y \in N$, satisfaisant :

- $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_n\}$ avec $x_1, \dots, x_n \in M$.
- Il existe voisinages $U_1, \dots, U_n \subseteq M$ disjoints des points $x_1, \dots, x_n$ et un voisinage $V \subseteq N$ de y telle que toute restriction $f|_{U_i} : U_i \rightarrow V$ est un difféomorphisme et

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^n U_i.$$

On prend une n -forme $\omega \in \Omega^n(N)$ de support $\text{supp}(\omega) \subseteq V$, telle que $\int_V \omega \neq 0$. Alors $\int_{U_i} (f^* \omega) = \varepsilon_i \int_N \omega$, où les facteurs $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$ ne dépendent que de l'orientation des cartes. Donc

$$\int_M f^* \omega = \sum_{i=1}^n \int_{U_i} (f^* \omega) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \cdot \int_V \omega = \underbrace{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i}_{\text{dg}(f) \in \mathbb{Z}} \cdot \underbrace{\int_N \omega}_{\neq 0},$$

ce qui complète la preuve. □

4.7 La caractéristique d'Euler

4.7.1 Définition: Nombre de Betti et la caractéristique d'Euler

Soit M une variété lisse de dimension n dont la cohomologie de de Rham est de dimension finie. Alors, on appelle $b_k(M) := \dim_{\mathbb{R}} H_{\text{dR}}^k(M)$ le **k -ième nombre de Betti** de M . On note

$$\chi(M) := \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \dim H_{\text{dR}}^k(M)$$

et appelle $\chi(M)$ la **caractéristique d'Euler** de M .

Remarques :

- Si M est compacte, alors par 4.5.5 toute $H_{\text{dR}}^k(M)$ est de dimension finie et $\chi(M)$ est donc bien définie.
- Par 4.4.5 la caractéristique d'Euler est une invariante de l'équivalence d'homotopie.

Exemples :

- Par 4.8.1, pour $n \in \mathbb{N}$ on a $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$. En particulier $\chi(S^2) = 2$.
- Tout surface d'un polyèdre convexe dans $\mathbb{R}^3$, étant homéomorphe à S^2 , possède la caractéristique d'Euler 2.

4.7.2 La caractéristique d'Euler pour variétés composés

Soient U, V sous-parties ouverts de la variété M lisse. Si U, V et $U \cap V$ ont une cohomologie de de Rham de dimension finie, alors le même est vrai pour $U \cup V$ et on a

$$\chi(U \cup V) = \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V) \quad .$$

Preuve : Voir [8], lemme 12.15.

4.7.3 Théorème sur CW-complexes

Soit M un CW-complex fini. Alors son caractéristique d'Euler est donné par

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot n_k \quad ,$$

où n_k est le nombre des cellules de dimension k .

4.7.4 Théorème de Poincaré-Hopf

Soit M une variété lisse compacte. Alors, il existe sur M un champs de vecteurs non-nul partout ssi $\chi(M) = 0$.

Preuve : Voir [8].

Remarques :

- (i) Dans le cas spécial $M = S^2$ on retrouve le résultat de théorème 3.8.6.
- (ii) Plus généralement, on peut montrer que S^n admet un champs de vecteurs non-nul partout ssi n est impaire. Voir [8], théorème 7.3 pour une preuve.

4.8 Exemples

4.8.1 Exemple : Les groupes de cohomologie de S^n

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}_0$ l'espace $H_{\text{dR}}^k(S^n)$ est donné par

$$H_{\text{dR}}^k(S^n) \cong_{\mathbb{R}} \begin{cases} \mathbb{R} & : k \in \{0, n\} \\ \{0\} & : \text{ailleurs} \end{cases} \quad . \quad (4.8.1.1)$$

De plus $H^0(S^0) \cong_{\mathbb{R}} \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Preuve par récurrence : Nous nous rappelons que par remarque 4.3.1(vi) pour tout $\mathcal{C}^\infty$ -variété M on a $H_{\text{dR}}^0(M) \cong_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^k$, où k est son nombre des composants connexes. Donc en particulier $H^0(S^0) \cong_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$ et $H_{\text{dR}}^0(S^n) \cong_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$. De plus, pour $k > n$ on a toujours $\Omega^k(S^n) = \{0\}$ et donc $H^k(S^n) = \{0\}$. Comme tout S^n , $n \geq 2$ est simplement connexe, par corollaire 4.3.6 on sait que $H_{\text{dR}}^1(S^n) = \{0\}$ pour tout $n \geq 2$. Finalement, par théorème 4.3.5 on a

$$H_{\text{dR}}^1(S^1) \cong_{\mathbb{R}} \text{Hom} [\Pi_1(S^1), \mathbb{R}] \cong_{\mathbb{R}} \text{Hom} [\mathbb{Z}, \mathbb{R}] \cong_{\mathbb{R}} \mathbb{R} \quad .$$

Supposons maintenant que (4.8.1.1) est vrai pour tous dimensions plus petites que n . On recouvre S^n par deux parties U_1, U_2 plus simples : On considère $S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ et pose

$$U_1 := \{\mathbf{x} \in S^n : x_1 \leq \frac{1}{2}\} \quad , \quad U_2 := \{\mathbf{x} \in S^n : x_1 \geq -\frac{1}{2}\} \quad .$$

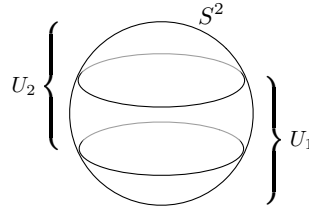


FIGURE 39: Sur le recouvrement de S^n par deux parties contractiles. Ici, comme exemple le cas $n = 2$.

Noter que par 4.5.5 les cohomologies de de Rham des S^n, U_1, U_2 et $U_1 \cap U_2$ sont de dimension finie. Par Mayer-Vietoris 4.5.1 on sait que la suite

$$0 \longrightarrow H_{\text{dR}}^0(S^n) \longrightarrow H_{\text{dR}}^0(U_1) \times H_{\text{dR}}^0(U_2) \longrightarrow H_{\text{dR}}^0(U_1 \cap U_2) \longrightarrow H_{\text{dR}}^1(S^n) \longrightarrow \dots \longrightarrow H_{\text{dR}}^n(U_1 \cap U_2) \longrightarrow 0 \quad (4.8.1.2)$$

est exacte (avec morphismes appropriés). Se rappeler que U_1, U_2 sont contractiles via homotopies lisses et que la variété $U_1 \cap U_2$ est homotopiquement équivalente à S^{n-1} . Donc la suite exacte (4.8.1.2) prend la forme

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \underbrace{H_{\text{dR}}^0(S^n)}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \underbrace{H_{\text{dR}}^0(U_1)}_{\mathbb{R}} \times \underbrace{H_{\text{dR}}^0(U_2)}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \underbrace{H_{\text{dR}}^0(U_1 \cap U_2)}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \\ \dots &\longrightarrow H_{\text{dR}}^k(S^n) \longrightarrow \underbrace{H_{\text{dR}}^k(U_1)}_0 \times \underbrace{H_{\text{dR}}^k(U_2)}_0 \longrightarrow \underbrace{H_{\text{dR}}^k(U_1 \cap U_2)}_0 \longrightarrow \quad \Bigg| \quad 1 \leq k \leq n-2 \\ &\hspace{15em} \text{par récurrence} \\ \dots &\longrightarrow H_{\text{dR}}^{n-1}(S^n) \longrightarrow \underbrace{H_{\text{dR}}^{n-1}(U_1)}_0 \times \underbrace{H_{\text{dR}}^{n-1}(U_2)}_0 \longrightarrow \underbrace{H_{\text{dR}}^{n-1}(U_1 \cap U_2)}_{\mathbb{R}} \\ &\hspace{15em} \text{par récurrence} \\ &\longrightarrow H_{\text{dR}}^n(S^n) \longrightarrow \underbrace{H_{\text{dR}}^n(U_1)}_0 \times \underbrace{H_{\text{dR}}^n(U_2)}_0 \longrightarrow \underbrace{H_{\text{dR}}^n(U_1 \cap U_2)}_0 \longrightarrow 0 \\ &\hspace{15em} \text{par récurrence} \end{aligned}$$

En particulier $0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow H_{\text{dR}}^n(S^n) \longrightarrow 0$ est exacte, donc par lemme 4.1.3 il faut

$$\dim \mathbb{R} - \dim H_{\text{dR}}^n(S^n) = 0 \quad ,$$

c'est-à-dire $H_{\text{dR}}^n(S^n) \cong_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$. Donc le cas $n = 2$ est aussi montré et nous supposons $n \geq 3$. Alors pour $1 \leq k \leq n-2$ la suite

$$0 \longrightarrow H_{\text{dR}}^{k+1}(S^n) \longrightarrow 0$$

est exacte et donc $H_{\text{dR}}^{k+1}(S^n) = 0$. Cela complète la preuve. □

4.8.2 Exemple : La cohomologie de $S^2 \times S^2$

La cohomologie de de Rham de $S^2 \times S^2$ est donnée par

$$H_{\text{dR}}^k(S^2 \times S^2) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & : k = 0 \\ 0 & : k = 1 \\ \mathbb{R}^2 & : k = 2 \\ 0 & : k = 3 \\ \mathbb{R} & : k = 4 \end{cases} .$$

Preuve : Décomposer une des sphères S^2 comme dans 4.8.1 en $S^2 = U_1 \cup U_2$ et appliquer Mayer-Vietoris 4.5.1 à $(U_1 \times S^2) \cup (U_2 \times S^2)$. Par ailleurs, on pourrait utiliser le théorème de Künneth 4.6.8 et les résultats de 4.8.1. □

4.8.3 Exemple : La cohomologie du tore T^2

La cohomologie de de Rham du tore $T^2 := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ est donnée par

$$H_{\text{dR}}^k(T^2) = \begin{cases} \mathbb{R} & : k = 0 \\ \mathbb{R}^2 & : k = 1 \\ \mathbb{R} & : k = 2 \\ 0 & : k \geq 3 \end{cases} .$$

Preuve : On sait déjà que $\Pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$, et donc par théorème 4.3.5 on a

$$H_{\text{dR}}^1(T^2) \stackrel{4.3.5}{\cong}_{\mathbb{R}} \text{Hom}[\Pi_1(T^2), \mathbb{R}] \cong_{\mathbb{R}} \text{Hom}[\mathbb{Z}^2, \mathbb{R}] \cong_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 .$$

On décompose T^2 en T_{in}, T_0 , définies par $T_{\text{in}} := B_\varepsilon(x_0)$ et $T_0 := T^2 \setminus \{x_0\}$, où $x_0 \in T^2$ est fixé et $0 < \varepsilon < 1$.

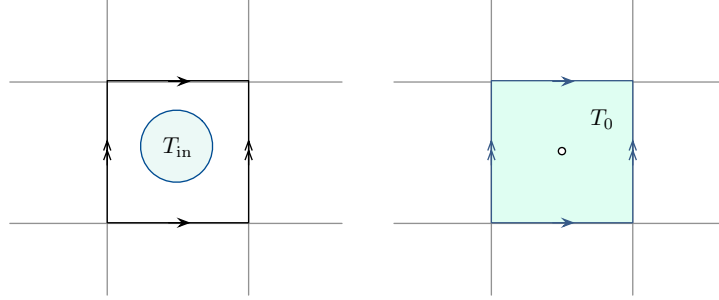


FIGURE 40: Sur la décomposition du tore $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ en les parties (non-disjoints) T_{in} et T_0 . Montrés sont leurs relèvements dans $\mathbb{R}^2$.

Noter que $T_0 \cap T_{\text{in}}$ est rétractable par déformation à S^1 via une homotopie de la rétracte lisse, donc par 4.8.1 $H_{\text{dR}}^1(T_0 \cap T_{\text{in}}) \cong_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$. Par Mayer-Vietoris 4.5.1 on a la suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \underbrace{H_{\text{dR}}^0(T^2)}_{\mathbb{R}} &\longrightarrow \underbrace{H_{\text{dR}}^0(T_0)}_{\mathbb{R}} \times \underbrace{H_{\text{dR}}^0(T_{\text{in}})}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \underbrace{H_{\text{dR}}^0(T_0 \cap T_{\text{in}})}_{\mathbb{R}} \\ &\longrightarrow \underbrace{H_{\text{dR}}^1(T^2)}_{\mathbb{R}^2} \longrightarrow \underbrace{H_{\text{dR}}^1(T_0)}_{\mathbb{R}^2} \times \underbrace{H_{\text{dR}}^1(T_{\text{in}})}_0 \longrightarrow \underbrace{H_{\text{dR}}^1(T_0 \cap T_{\text{in}})}_{\mathbb{R}} \\ &\xrightarrow{(\clubsuit)} H_{\text{dR}}^2(T^2) \longrightarrow 0 . \end{aligned}$$

La 2-forme fermée $d\varphi_1 \wedge d\varphi_2$ sur T^2 n'est pas exacte, donc $\dim H_{\text{dR}}^2(T^2) \geq 1$. D'autre part, comme la suite est exacte on sait que le morphisme de bord $(\clubsuit)$ est surjectif, donc $\dim H_{\text{dR}}^2(T^2) \leq 1$. Bilan, $H_{\text{dR}}^2(T^2) \cong_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$. $\square$

Remarque : On peut en fait montrer que la cohomologie de de Rham du tore $T^n := \bigtimes_{i=1}^n S^1$ est donnée par

$$H_{\text{dR}}^k(T^n) \cong_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{\binom{n}{k}} .$$

4.8.4 Exemple : La cohomologie de $\mathbb{RP}^2$ et $\mathbb{RP}^3$

Les cohomologies de de Rham de $\mathbb{RP}^2$ et $\mathbb{RP}^3$ sont données par

$$H_{\text{dR}}^k(\mathbb{RP}^2) = \begin{cases} \mathbb{R} & : k = 0 \\ 0 & : k \geq 1 \end{cases} , \quad H_{\text{dR}}^k(\mathbb{RP}^3) = \begin{cases} \mathbb{R} & : k \in \{0, 3\} \\ 0 & : \text{ailleurs} \end{cases}$$

Preuve : On se rappelle que par 3.8.1, $\mathbb{RP}^n$ est homéomorphe à $B_n/(x \sim -x, x \in \partial B_n)$ et $\mathbb{RP}^1$ homéomorphe à S^1 . On décompose $\mathbb{RP}^n$ en façon similaire comme dans 4.8.3, en les parties $U_0 := \mathbb{RP}^n \setminus \{0\}$ et $U_{\text{in}} := B_\varepsilon(0)$ avec $0 < \varepsilon < 1$.

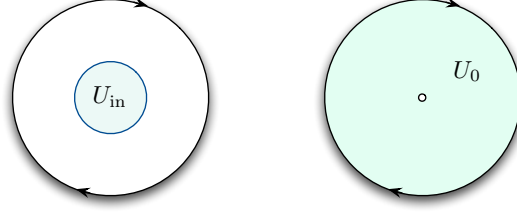


FIGURE 41: Sur la décomposition de $\mathbb{RP}^2$ en les parties (non-disjoints) U_{in} et U_0 .

Comme U_{in} est contractile via une contraction lisse, on sait qu'il possède par 4.4.5 la cohomologie triviale (sauf que $H_{\text{dR}}^0(U_{\text{in}}) \cong_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$). De plus, $U_0 \cap U_{\text{in}}$ est rétractable par déformation à S^{n-1} via une homotopie de la rétracte lisse, donc

$$H_{\text{dR}}^k(U_0 \cap U_{\text{in}}) = H_{\text{dR}}^k(S^{n-1}) \quad \forall k \in \mathbb{N} .$$

Cas $n = 2$

Comme U_0 est rétractable par déformation au bord ($\cong \mathbb{RP}^1$) via une homotopie de la rétracte lisse, on sait que

$$H_{\text{dR}}^1(U_0) \cong_{\mathbb{R}} H_{\text{dR}}^1(\mathbb{RP}^1) \cong_{\mathbb{R}} H_{\text{dR}}^1(S^1) \stackrel{4.8.1}{\cong}_{\mathbb{R}} \mathbb{R} .$$

Par Mayer-Vietoris 4.5.1 on a la suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \underbrace{H_{\text{dR}}^0(\mathbb{RP}^2)}_{\mathbb{R}} &\longrightarrow \underbrace{H_{\text{dR}}^0(U_0)}_{\mathbb{R}} \times \underbrace{H_{\text{dR}}^0(U_{\text{in}})}_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\clubsuit} \underbrace{H_{\text{dR}}^0(U_0 \cap U_{\text{in}})}_{\mathbb{R}} \\ &\xrightarrow{\spadesuit} \underbrace{H_{\text{dR}}^1(\mathbb{RP}^2)}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \underbrace{H_{\text{dR}}^1(U_0)}_{\mathbb{R}} \times \underbrace{H_{\text{dR}}^1(U_{\text{in}})}_0 \longrightarrow \underbrace{H_{\text{dR}}^1(U_0 \cap U_{\text{in}})}_{\mathbb{R}} \\ &\xrightarrow{\quad} H_{\text{dR}}^2(\mathbb{RP}^2) \longrightarrow 0 . \end{aligned}$$

par 4.8.1

Par 4.3.5 on sait que

$$H_{\text{dR}}^1(\mathbb{RP}^2) \stackrel{4.3.5}{=} \text{Hom} [\Pi_1(\mathbb{RP}^2), \mathbb{R}] \stackrel{3.8.1}{=} \text{Hom} [\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{R}] = \{0\} .$$

Comme $(\clubsuit)$ est surjectif, $(\spadesuit)$ est trivial et donc par la formule de sommation des dimensions 4.1.3 on conclut $H_{\text{dR}}^2(\mathbb{RP}^2) = \{0\}$.

Cas $n = 3$

Comme U_0 est rétractable par déformation au bord ($\cong \mathbb{RP}^2$) via une homotopie de la rétracte lisse, on sait que

$$H_{\text{dR}}^1(U_0) \cong_{\mathbb{R}} H_{\text{dR}}^1(\mathbb{RP}^2) \cong_{\mathbb{R}} \{0\}$$

$$H_{\text{dR}}^2(U_0) \cong_{\mathbb{R}} H_{\text{dR}}^2(\mathbb{RP}^2) \cong_{\mathbb{R}} \{0\} .$$

De façon similaire que dans le cas $n = 2$, on a la suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H_{\text{dR}}^1(\mathbb{RP}^3) &\longrightarrow \underbrace{H_{\text{dR}}^1(U_0)}_0 \times \underbrace{H_{\text{dR}}^1(U_{\text{in}})}_0 \longrightarrow \underbrace{H_{\text{dR}}^1(U_0 \cap U_{\text{in}})}_0 \\ &\longrightarrow H_{\text{dR}}^2(\mathbb{RP}^3) \longrightarrow \underbrace{H_{\text{dR}}^2(U_0)}_0 \times \underbrace{H_{\text{dR}}^2(U_{\text{in}})}_0 \longrightarrow \underbrace{H_{\text{dR}}^2(U_0 \cap U_{\text{in}})}_{\mathbb{R}} \\ &\longrightarrow H^3(\mathbb{RP}^3) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

par 4.8.1

On applique la formule de sommation des dimensions 4.1.3 pour les sous-suites exactes et conclut $H_{\text{dR}}^1(\mathbb{RP}^3) = 0$, $H_{\text{dR}}^2(\mathbb{RP}^3) = 0$ et $H_{\text{dR}}^3(\mathbb{RP}^3) \cong_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$. □

Remarques :

- (i) Comme toute $\mathbb{RP}^n$ est compacte et connexe, par 4.8.4 et théorème 4.6.4 on conclut que $\mathbb{RP}^2$ n'est pas orientable et $\mathbb{RP}^3$ est orientable.
- (ii) En fait, on peut montrer[8] que $\mathbb{RP}^n$ est orientable ssi n est impaire et qu'il possède la cohomologie

$$H_{\text{dR}}^k(\mathbb{RP}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & : k = 0 \\ 0 & : 1 \leq k < n \\ 0 & : k = n \in 2\mathbb{Z} \\ \mathbb{R} & : k = n \notin 2\mathbb{Z} \\ 0 & : k > n \end{cases} .$$

Donc, par remarque 4.2.4(ii) $\mathbb{RP}^n$ n'est pas simplement connexe pour $n \in 2\mathbb{Z}$.

4.8.5 Definition: L'espace projectif complexe

Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit l'espace $\mathbb{CP}^n$ comme le quotient de la surface de la boule unité dans $\mathbb{C}^{n+1}$ sous l'action de $U(1)$, c'est-à-dire en identifiant deux points $x, y \in \partial B_1(0) \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ ssi $x = u \cdot y$ pour un $u \in \mathbb{C}$, $|u| = 1$. Pour $n = 0$ on définit $\mathbb{CP}^0$ comme un seul point. On appelle $\mathbb{CP}^n$ l'**espace projectif complexe de dimension $2n$** .

Remarques

- (i) L'espace $\mathbb{CP}^n$ est une variété lisse de dimension $2n$ (dimension complexe n).
- (ii) L'espace $\mathbb{CP}^n$ est homéomorphe au quotient de $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ sous l'action multiplicative de $\mathbb{C} \setminus \{0\} = \text{GL}_1(\mathbb{C})$. Autrement dit, tout point $z \in \mathbb{CP}^n$ peut être décrit par $(n+1)$ -uplets complexes comme

$$(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$$

où on identifie les uplets se différenciant par un facteur $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

- (iii) On interprète $\mathbb{CP}^n$ comme l'espace des $\mathbb{C}$ -droites dans $\mathbb{C}^{n+1}$ passant par l'origine. Sauf l'origine, ces sont exactement les orbites de l'action de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ sur $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$.
- (iv) L'espace $\mathbb{CP}^n$ peut être regardé comme l'union disjointe des espaces $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{CP}^{n-1}$, avec $\mathbb{C}^n$ comme intérieur et $\mathbb{CP}^{n-1}$ comme bord de $\mathbb{CP}^n$. Donc, par récurrence

$$\mathbb{CP}^n \simeq \mathbb{C}^n \cup \mathbb{C}^{n-1} \cup \dots \cup \mathbb{C}^1 \cup \{\text{point}\} .$$

En utilisant les *coordonnées* dans remarque (iii), on trouve que $\mathbb{C}^n$ correspond aux points de coordonnées $(z_1, \dots, z_n, 1) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ et $\mathbb{CP}^{n-1}$ aux points de coordonnées $(z_1, \dots, z_n, 0) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$.

- (v) En particulier, $\mathbb{CP}^1 \simeq S^2$ (sphère de Riemann).

4.8.6 Exemple : La cohomologie de $\mathbb{CP}^2$

La cohomologie de de Rham de l'espace projectif complexe $\mathbb{CP}^2$ est donnée par

$$H_{\text{dR}}^k(\mathbb{CP}^2) = \begin{cases} \mathbb{R} & : k \in \{0, 2, 4\} \\ 0 & : k \in \{1, 3\} \end{cases} .$$

Preuve : On décompose $\mathbb{CP}^2$ en les parties $U_{\text{int}} := \text{int}(\mathbb{CP}^2) \simeq \mathbb{C}^2$ et $U_o := \mathbb{CP}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$. Noter que U_o se rétracte par déformation à $\mathbb{CP}^1$ via l'homotopie de rétraction

$$U_o \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{CP}^1 \quad , \quad ((z_1, z_2, z_3), t) \mapsto (z_1, z_2, 1 - t) \quad .$$

Comme $\mathbb{CP}^1 \simeq S^2$, par 4.4.5 on sait que U_o possède exactement la cohomologie de S^2 , donnée dans 4.8.1. De même façon, comme $U_o \cap U_{\text{int}} \simeq \mathbb{C}^2 \setminus \{\text{point}\}$ se rétracte par déformation à S^3 , on sait que $U_o \cap U_{\text{int}}$ possède la même cohomologie que S^3 , aussi donnée dans 4.8.1. D'autre part, comme U_{int} est contractile, par remarque 4.4.2(iii) tous ses groupes de cohomologie de de Rham $H_{\text{dR}}^k(U_{\text{int}})$, $k \in \mathbb{N}$, sont triviaux.

Par remarque 4.3.1(vi) on sait déjà que $H_{\text{dR}}^0(\mathbb{CP}^2) = \mathbb{R}$. Par Mayer-Vietoris 4.5.1 on a la suite exacte

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H_{\text{dR}}^1(\mathbb{CP}^2) \longrightarrow \underbrace{H_{\text{dR}}^1(U_o)}_0 \times \underbrace{H_{\text{dR}}^1(U_{\text{int}})}_0 \longrightarrow \underbrace{H_{\text{dR}}^1(U_o \cap U_{\text{int}})}_0 \\ &\longrightarrow H_{\text{dR}}^2(\mathbb{CP}^2) \longrightarrow \underbrace{H_{\text{dR}}^2(U_o)}_{\mathbb{R}} \times \underbrace{H_{\text{dR}}^2(U_{\text{int}})}_0 \longrightarrow \underbrace{H_{\text{dR}}^2(U_o \cap U_{\text{int}})}_0 \\ &\longrightarrow H_{\text{dR}}^3(\mathbb{CP}^2) \longrightarrow \underbrace{H_{\text{dR}}^3(U_o)}_0 \times \underbrace{H_{\text{dR}}^3(U_{\text{int}})}_0 \longrightarrow \underbrace{H_{\text{dR}}^3(U_o \cap U_{\text{int}})}_{\mathbb{R}} \\ &\longrightarrow H_{\text{dR}}^4(\mathbb{CP}^2) \longrightarrow 0 \quad . \end{aligned}$$

On applique la formule de sommation des dimensions 4.1.3 pour les sous-suites exactes et conclut

$$\dim H_{\text{dR}}^1(\mathbb{CP}^2) = 0 = \dim H_{\text{dR}}^3(\mathbb{CP}^2) \quad ,$$

ainsi que

$$\dim H_{\text{dR}}^2(\mathbb{CP}^2) = \mathbb{R} = \dim H_{\text{dR}}^4(\mathbb{CP}^2) \quad .$$

□

4.8.7 Corollaire : Homéomorphie de la boule S^4

Les variétés S^4 , $S^2 \times S^2$ et $\mathbb{CP}^2$ ne sont pas homéomorphes, même s'ils sont de même dimension et toutes simplement connexes.

Preuve : Par 4.8.1, 4.8.2 et 4.8.6 les variétés S^4 , $S^2 \times S^2$ et $\mathbb{CP}^2$ ont des cohomologies de de Rham différentes. Par 4.4.2, la cohomologie de de Rham est une invariante de topologie, d'où suit l'affirmation.

□

A Annexe

A.0.8 Lemme de Lebesgue sur espaces compacts

Soit X un espace métrique compact et $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement. Alors il existe un $\varepsilon > 0$, appelé **nombre de Lebesgue** tel que

$$\forall x \in X : \exists i \in I : B_\varepsilon(x) \subseteq U_i \quad (\text{A.0.8.1})$$

Preuve par l'absurde : Suppose que (A.0.8.1) est faux pour tout $\varepsilon > 0$. Alors, il existe $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (0, \infty)$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X$ tels que $\varepsilon_n \downarrow 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, i \in I : B_{\varepsilon_n}(x_n) \not\subseteq U_i$. Car X est compact, on peut supposer que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ pour quelque $x \in X$.

Il existe un $\varepsilon > 0$ et $j \in I$ tel que $B_\varepsilon(x) \subseteq U_j$. D'autre, il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $\varepsilon_n < \varepsilon/2$ et $x_n \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$. Par conséquence il faut

$$B_{\varepsilon_n}(x_n) \subseteq B_\varepsilon(x) \subseteq U_j ,$$

qui est une contradiction !

□

A.0.9 Lemme : Fonctions sur S^1

Soit $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors, il existe un $s \in S^1$ tel que $f(s) = f(-s)$. Évidemment, cette affirmation est fausse si $f : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ car $S^1 \hookrightarrow \mathbb{C}$.

Preuve : Suppose le contraire. Alors, la fonction $\varphi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$\varphi(s) := \frac{f(s) - f(-s)}{|f(s) - f(-s)|}$$

est continuée avec image $\{\pm 1\}$. Ça donne une contradiction car S^1 est connexe !

□

A.0.10 Lemme sur la continuité de fonctions

Soient X, Y espaces topologiques, $(U_i)_{i \in I}$ un recouvert ouvert de X et $f : X \rightarrow Y$ telle que la restriction $f|_{U_i} : U_i \rightarrow Y$ est continue pour tout $i \in I$. Alors, $f : X \rightarrow Y$ est continue.

Preuve : Soit $V \subseteq Y$ ouvert, alors

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i) \cap f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} \underbrace{f|_{U_i}^{-1}(V)}_{\substack{\text{ouvert dans } U_i \\ \Rightarrow \text{ouvert dans } X}}$$

est ouvert.

□

A.0.11 Lemme sur recouvrements des espaces produits

Soient $X_1, \dots, X_n$ espaces topologiques et $X := \prod_{i=1}^n X_i$ leur espace produit. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X . Alors, il existe un recouvrement $(\tilde{U}_j)_{j \in J}$ de X tel que :

- Tout $\tilde{U}_j$ est contenu dans un certain U_i .
- Tout $\tilde{U}_j$ est du type $\tilde{U}_j = \prod_{i=1}^n V_{ji}$ pour certains ouverts $V_{ji} \subseteq X_i$.

Preuve : L'ensemble

$$\mathcal{U} := \left\{ \bigtimes_{i=1}^n V_i \mid V_i \subseteq X_i \text{ ouvert} \right\}$$

est une base de la topologie de X . Donc, pour tout $x \in U_i \subseteq X$ choisit un $\tilde{U}_{x,i} \in \mathcal{U}$ tel que $x \in \tilde{U}_{x,i} \subseteq U_i$. Alors l'ensemble des $\tilde{U}_{x,i}$ est un recouvrement de X qui satisfait les propriétés ci-dessus. $\square$

A.0.12 Définition: Topologie quotient

Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur l'espace topologique Ω et $\Omega/\sim$ l'ensemble des classes d'équivalence par rapport à $\sim$. Alors, l'application $p : \Omega \rightarrow \Omega/\sim$ définie par $p : \omega \mapsto [\omega]$ est surjective. On dit un sous-ensemble $U \subseteq \Omega/\sim$ **ouvert**, ssi $p^{-1}(U)$ est ouvert dans Ω .

Si G est un groupe qui agit sur Ω , alors il munit Ω d'une relation d'équivalence $\sim_G$, dont les classes d'équivalence sont les orbites de G dans Ω . On note $\Omega/G := \Omega/\sim_G$.

A.0.13 Lemme : Caractérisation de bases des topologies

Soit $\mathcal{O}$ une topologie sur T et $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{O}$ une sous-base de $\mathcal{O}$. Alors, $\mathcal{U}$ est une base de $\mathcal{O}$ ssi

1. $\mathcal{U}$ est un recouvrement de T .
2. Pour tout $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$, $x \in U_1 \cap U_2$ il existe un $U_3 \in \mathcal{U}$ tel que $x \in U_3 \subseteq U_1 \cap U_2$.

A.0.14 Lemme : Caractérisation de groupes quotients

Soit $(G, \circ)$ un groupe et $N \trianglelefteq G$ un sous-groupe normale dans G . Alors, il existe un groupe P et morphisme $\Pi : G \rightarrow P$ tel que :

1. $\Pi(N) = \{0\}$
2. Le paire (P, Π) satisfait la **propriété universelle** : Si H est un groupe et $f : G \rightarrow H$ un homomorphisme tel que $f(N) = \{0\}$, alors il existe un unique homomorphisme $\bar{f} : P \rightarrow H$ tel que $f = \bar{f} \circ \Pi$.

Toute autre paire (P', Π') de groupe P' avec homomorphisme $\Pi' : G \rightarrow P'$ satisfaisant les propriétés (1) et (2), est isomorphe à P via un unique isomorphisme. La classe de groupes et homomorphismes isomorphes à (P, Π) est exactement le groupe quotient G/N avec la projection $\Pi : G \rightarrow G/N$ donnée par $\Pi : g \mapsto g \circ N$.

B Symboles & Abréviations

ssi : Si et seulement si.

$\mathbb{R}_+$: $[0, \infty)$.

$\mathbb{C}_+$: $\mathbb{R}_+ + i\mathbb{R}_+$.

$\mathbb{K}$: Corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$\mathbb{K}^\times$: Inversibles dans $\mathbb{K}$, c'est-à-dire $\mathbb{K}^\times = \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

$\mathbb{P}$: Les nombres premiers.

$B_r(x)$: La boule fermée de rayon r au tour du point x .

$B_r^o(x)$: La boule ouverte de rayon r au tour du point x .

B^n : La boule unité fermée dans $\mathbb{R}^n$.

$\arg$: Argument des nombres complexes.

$\mathcal{C}(X, Y)$: Fonctions continues entre les espaces topologiques X, Y .

$\mathcal{C}_c(X, E)$: Fonctions continues sur l'espace topologique X dans l'espace vectoriel E avec support compact.

$\mathcal{C}_b(X, E)$: Fonctions continues, bornées sur l'espace topologique X dans l'espace normé E .

$\mathcal{P}(\Omega)$: L'ensemble des parties de l'ensemble Ω .

$\mathcal{B}(X)$: σ -algèbre Borelienne sur l'espace topologique X .

e_{ij} : Base standard dans $\mathbb{K}^{n \times n}$.

$\text{End}_{\mathbb{K}}(V)$: Anneau des $\mathbb{K}$ -endomorphismes sur un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel V .

$\ker(f)$: Noyau du homomorphisme f .

E' : Espace dual topologique d'un espace normé E .

$\sim_h$: Relation d'équivalence d'homotopie. Voir 2.2.1.

$\sim_{hs}$: Relation d'équivalence d'homotopie stricte entre chemins. Voir 2.2.3.

$\text{Aut}(p)$: Groupe des homéomorphismes qui préservent le revêtement p . Voir 3.3.2.

$c_0 \cdot [\gamma]_{hs}$: Action du groupe fondamental $\Pi_1(Y, y_0)$ sur le fibre $p^{-1}(y_0)$. Voir ??.

$\text{Sym}_p(y_0)$: Les permutations du fibre $p^{-1}(y_0)$ qui commute avec la monodromie de $\Pi_1(Y, y_0)$. Voir 3.3.8.

$\text{St}_{\Pi_1}(c_0)$: Stabilisateur de c_0 par rapport à l'action de monodromie de $\Pi_1(Y, p(c_0))$. Voir 3.2.3(1).

$\text{Orb}_G(\omega)$: Orbite d'un élément $\omega \in \Omega$ par rapport à l'action d'un groupe G sur Ω .

$G \star H$: Produit libre des groupes G, H . Voir 3.5.1.

$[f]_h$: Classe d'homotopie de la fonction $f : X \rightarrow Y$. Voir remarque 2.2.1(i).

$[\gamma]_{hs}$: Classe d'homotopie stricte du chemin γ . Voir 2.2.3.

$[x_0]_{hs}$: Classe d'homotopie stricte des lacets strictement contractiles à x_0 . Voir 2.2.4.

$\mathcal{X}(M)$: Espace $\mathbb{R}$ -linéaire des champs de vecteurs sur la variété M . Voir 4.2.1.

$\mathcal{F}(M)$: Espace $\mathbb{R}$ -linéaire des fonctions réelles lisses sur la variété M . Voir 4.2.1.

$\Omega^k(M)$: Espace $\mathbb{R}$ -linéaire des k -formes sur la variété M . Voir 4.2.1.

$f^*\omega$: Forme pullback de la k -forme ω par la fonction f . Voir 4.2.3.

ad_g : Automorphisme intérieur associé au élément g d'un groupe.

$H_{\text{dR}}^k(M)$: La cohomologie de de Rham pour la $\mathcal{C}^\infty$ -variété M . Voir 4.3.1.

$\chi(M)$: Caractéristique d'Euler de la $\mathcal{C}^\infty$ -variété M . Voir 4.7.1.

$\mathbb{RP}^n$: Espace projectif réel de dimension n . Voir 3.8.1.

$\mathbb{CP}^n$: Espace projectif complexe de dimension $2n$. Voir 4.8.5.

$\text{dg}(f)$: Degré d'une application $f : M \rightarrow N$ entre deux variétés M, N de même dimension. Voir 4.6.9.

Références

- [1] M. Audin, *Topologie, revêtements et groupe fondamental*
Cours de Magistère 2e année
<http://www-irma.u-strasbg.fr/~maudin/publications.html> (03.10.2010)
- [2] E. H. Spanier, *Algebraic Topology*
Springer, 1994
- [3] D. E. Wilkins, *Course 421 : Algebraic Topology, Covering Maps and Discontinuous Group Actions*
School of Mathematics, Trinity College, Ireland, 2008
http://www.maths.tcd.ie/~dwilkins/Courses/421/421S4_0809.pdf (08.10.2010)
- [4] R. Brown, *Groupoids and Van Kampen's theorem*
Proc. London Math. Soc., No. 3, pp. 385-401, 1967
http://en.wikipedia.org/wiki/Seifert-van_Kampen_theorem (17.10.2010)
- [5] D. Litt, *The Poincaré Lemma and de Rham Cohomology*
Harward University
http://www.thehcmr.org/issue1_2/poincare_lemma.pdf (25.10.2010)
- [6] J. F. Davis, P. Kirk, *Lecture Notes in Algebraic Topology*
AMS, 2001
- [7] N. Steenrod, *The Topology of Fiber Bundles*
Princeton Mathematical Series No. 14, Princeton University Press, 1951
- [8] H. Madsen, J. Tornehave, *From calculus to cohomology : de Rham cohomology and characteristic classes*
Cambridge University Press, 1997
- [9] W. Fulton, *Algebraic Topology : A First Course*
Springer, 1997
- [10] S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine, *Riemannian Geometry*
Springer, 2004
- [11] J. Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles*
Presses Universitaires de Grenoble, 1997
- [12] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*
Publish or Perish, 1999
- [13] J. P. May, *A Concise Course in Algebraic Topology*
Chicago Lectures in Mathematics, 2007
- [14] R. Hain, *Lectures of the Hodge-de Rham Theory of the Fundamental Group of $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$*
<http://math.arizona.edu/~swc/notes/files/05HainNotes.pdf> (27.11.2010)
- [15] A. Hatcher, *Algebraic Topology*
Cambridge University Press, 2002
- [16] G. de Rham, *Sur l'analysis situs des variétés à n dimensions*
J. Math. Pures Appl. Sér. 9, 10, 1931, pp. 115-200
- [17] M. Price, *A Proof of the De Rham Theorem using Induction on open Sets*
<http://www.cs.bath.ac.uk/MPrice/downloads/DeRham.pdf> (27.11.2010)
- [18] R. Bott, L. W. Tu, *Differential forms in algebraic topology*
Springer, 1982

Index

- k -forme, [56](#)
 - exacte, [57](#)
 - fermée, [57](#)
- équivalence
 - d'homotopie, [9](#), [59](#)
 - de revêtements, [20](#)
- action
 - de monodromie, [27](#)
 - du groupe fondamental, [27](#)
 - proprement discontinue, [35](#)
- application de cochaînes, [52](#)
- automorphism
 - d'un revêtement, [29](#)
- base, [45](#)
 - de revêtement, [19](#)
- caractéristique d'Euler, [65](#)
- chemin, [5](#)
 - fermé, [5](#)
 - inverse, [10](#)
- chemins
 - strictement homotopes, [7](#)
- class
 - d'homotopie, [6](#)
- classes
 - d'homotopie stricte, [7](#)
- cobord, [51](#)
- cochaîne, [51](#)
- cocycle, [51](#)
- cohomologie
 - de de Rham, [57](#)
- complexe
 - de d Rham, [57](#)
- composition
 - des chemins, [10](#)
- connexe
 - par arcs, [5](#)
- contraction, [8](#)
- degré, [64](#)
 - d'un chemin, [15](#)
- espace
 - connexe, [5](#)
 - contractile, [8](#)
 - lisse contractile, [8](#)
 - simplement connexe, [8](#)
- espace étalé
 - de revêtement, [19](#)
- espace projectif
 - complexe, [70](#)
 - réel, [45](#)
- espace total, [45](#)
 - de revêtement, [19](#)
- feuille
 - de revêtement, [19](#)
- fibré localement trivial, [45](#)
- fibré trivial, [45](#)
- fibration, [23](#), [24](#)
- fibre, [23](#), [45](#)
- fonction
 - nul-homotope, [5](#)
- forme d'orientation, [57](#)
- formes d'orientation
 - équivalents, [57](#)
- groupe
 - fondamental, [11](#)
 - groupe abélianisé, [58](#)
 - groupe dérivé, [58](#)
 - groupes de cohomologie, [51](#)
- homotopes
 - fonctions homotopes, [5](#)
- homotopie, [5](#)
 - d'une rétracte, [9](#)
 - des chemins stricte, [7](#)
 - relative, [5](#)
- lacet, [5](#)
- Lemniscate de Bernoulli, [47](#)
- localement connexe
 - par arcs, [5](#)
- modules de cohomologie, [51](#)
- monodromie, [27](#)
- nombre de Betti, [65](#)
- nombre de Lebesgue, [72](#)
- nul-homotopie, [5](#)
- opérateur de cobord, [51](#)
- orientation d'une variété, [57](#)
- plongement canonique
 - du produit libre, [38](#), [39](#)
- point
 - base, [5](#)
- points reliés, [5](#)
- produit libre, [37](#)
- produit libre amalgamé, [39](#)
- propriété universelle, [73](#)
- pullback
 - d'une k -forme, [57](#)
- pushout, [38](#)
- rétracte, [9](#)
 - par déformation, [9](#)
- rétraction, [9](#)
 - par déformation, [9](#)

recouvrement
 bon, [61](#)
relèvement, [20](#), [23](#)
 de chemin, [21](#)
revêtement, [19](#)
 galoisien, [34](#)
 normal, [34](#)
 régulier, [34](#)
 trivial, [19](#)
 universel, [40](#)

suite exacte, [51](#)
 d'applications de cochaînes, [53](#)
suite exacte courte, [51](#)

topologie
 quotient, [73](#)
trivialisation locale, [45](#)

universalité, [37](#), [39](#)
 de revêtements, [41](#)

variété orientable, [57](#)
voisinage
 trivialisant, [19](#)