Théorie des Groupes et Symétries en Physique

UJF Grenoble - Hiver 2010/2011

Feuille d'Exercices 06 - Solutions

Stilianos Louca

6 janvier 2011

Exercice 01

Noter que $O(2) = \{\mathrm{Id}, S\} \circ \mathrm{SO}(2)$.

- On utilise la représentation dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ donnée par

$$D(R(\varphi)) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad , \quad D(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et voit que

$$D(SR(\varphi)S^{-1}) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = D(R(-\varphi)) \quad .$$

Comme la représentation est fidèle, on a montré l'affirmation.

- Soit $D : \mathrm{O}(2) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ une représentation irréductible de $\mathrm{O}(3)$. Comme la restriction $D\big|_{\mathrm{SO}(2)}$ et une représentation de $\mathrm{SO}(2)$, on sait qu'elle est somme directe $\sum_{i=1}^n D^{(m_i)}$ des irréductibles $D^{(m_i)} : \mathrm{SO}(2) \to \mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$, données par

$$D^{(m_i)}(R(\varphi)) := e^{im_i\varphi} \quad , \quad m_i \in \mathbb{Z} \quad .$$

Comme

$$\sum_{i=1}^n e^{-im_i\varphi} = \sum_{i=1}^n \chi^{(m_i)}(-\varphi) = \chi(D(R(-\varphi))) = \chi\left[D(SR(\varphi)S^{-1})\right]$$

$$= \chi(R(\varphi)) = \sum_{i=1}^n \chi^{(m_i)}(\varphi) = \sum_{i=1}^n e^{im_i\varphi}$$

pour tout $\varphi \in S^1$, pour chaque $i \in \{1,..,n\}$ il existe un $j \in \{1,..,m\}$ tel que $m_i = -m_j$, c'est-à-dire $D\big|_{\mathrm{SO}(2)}$ est combinaison des paires de type $D^{(m)}, D^{(-m)}$.

En particulier, en cas que $n = 1$ la seule possibilité est que $D\big|_{\mathrm{SO}(2)} = D^{(0)} \equiv 1$. Comme S est d'ordre 2, il faut que $D(S) \in \{\pm 1\}$. En posant $D(S) := -1$ ou $D(S) = +1$ on trouve en tous les deux cas une représentation irréductible de $\mathrm{O}(2)$. Pour $n = 2$, une représentation irréductible de $\mathrm{O}(2)$ est donnée par

$$D\big|_{\mathrm{SO}(2)} := D^{(1)} \oplus D^{(-1)} = \begin{pmatrix} e^{im\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-im\varphi} \end{pmatrix} \quad , \quad D(S) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

pour $m \in \mathbb{Z}$ quelconque.

Exercice 02

Pour $\mathbf{n} \in S^2$ et $\varphi \in S^1$ soit $R_{\mathbf{n}}(\varphi) \in \mathrm{SO}(3)$ l'opérateur de la rotation au tour de l'axe $\mathbf{n}$ par l'angle φ. On sait que

$$R_{\mathbf{n}'}(\varphi) = S(\mathbf{n},\mathbf{n}')R_{\mathbf{n}}(\varphi)S(\mathbf{n},\mathbf{n}')^{-1} \tag{1}$$

pour tout $S(\mathbf{n},\mathbf{n}') \in \mathrm{SO}(3)$ et $\mathbf{n}' := S(\mathbf{n},\mathbf{n}')\mathbf{n}$. Soient $\varphi_1,..,\varphi_3 \in S^1$ trois angles $\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2 \in S^2$ deux axes arbitraires, fixés. Considérons les axes

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}_1 &:= \mathbf{n}_1\\
\mathbf{m}_2 &:= R_{\mathbf{m}_1}(\varphi_1)\mathbf{n}_2\\
\mathbf{m}_3 &:= R_{\mathbf{m}_2}(\varphi_2)\underbrace{R_{\mathbf{m}_1}(\varphi_1)\mathbf{n}_1}_{\mathbf{n}_1} = R_{\mathbf{m}_2}(\varphi_2)\mathbf{n}_1
\end{aligned}$$

et la rotation

$$R(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3) := R_{\mathbf{m}_3}(\varphi_3)R_{\mathbf{m}_2}(\varphi_2)R_{\mathbf{m}_1}(\varphi_1) \quad ,$$

définie comme composition de rotations autour les axes $\mathbf{m}_1,\mathbf{m}_2,\mathbf{m}_3$. Alors

$$\begin{aligned}
R(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3) &\overset{(1)}{=} \overbrace{R_{\mathbf{m}_2}(\varphi_2)R_{\mathbf{n}_1}(\varphi_3)\cancel{R_{\mathbf{m}_2}(\varphi_2)^{-1}}}^{R_{\mathbf{m}_3}(\varphi_3)}\,\cancel{R_{\mathbf{m}_2}(\varphi_2)}R_{\mathbf{m}_1}(\varphi_1)\\
&\overset{(1)}{=} \overbrace{R_{\mathbf{m}_1}(\varphi_1)R_{\mathbf{n}_2}(\varphi_2)R_{\mathbf{m}_1}(\varphi_1)^{-1}}^{R_{\mathbf{m}_2}(\varphi_2)}\,\underbrace{R_{\mathbf{n}_1}(\varphi_3)R_{\mathbf{m}_1}(\varphi_1)}_{R_{\mathbf{m}_1}(\varphi_1)R_{\mathbf{n}_1}(\varphi_3)}\\
&= R_{\mathbf{n}_1}(\varphi_1)R_{\mathbf{n}_2}(\varphi_2)R_{\mathbf{n}_1}(\varphi_3) \quad .
\end{aligned}$$

Donc, $R(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$ est aussi composition de rotations autour les axes $\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2$ et $\mathbf{n}_1$. Dans le cas spécial $\mathbf{n}_1 = \mathbf{e}_3$ et $\mathbf{n}_2 = \mathbf{e}_2$, alors

$$R_{\mathbf{e}_3''}(\varphi_3)R_{\mathbf{e}_2'}(\varphi_2)R_{\mathbf{e}_3}(\varphi_1) = R_{\mathbf{e}_3}(\varphi_1)R_{\mathbf{e}_2}(\varphi_2)R_{\mathbf{e}_3}(\varphi_3)$$

avec $\mathbf{e}_3'' := \mathbf{m}_3$ et $\mathbf{e}_2' := \mathbf{m}_2$.

Exercice 03

Se rappeler que $d^j(\vartheta)$ est définie comme la représentation irréductible dans $\mathrm{GL}_{2j+1}(\mathbb{C})$ de la rotation $R_{\mathbf{e}_2}(\vartheta) \in \mathrm{SO}(3)$ autour de l'axe $\mathbf{e}_2$ par l'angle ϑ. Si X_2 est le générateur des rotations autour de l'axe y, alors

$$d^j(\vartheta) := D^{(j)}(R_{\mathbf{e}_2}(\vartheta)) = D^{(j)}\left[e^{-i\vartheta X_2}\right] = \exp\left[-i\vartheta D^{(j)}(X_2)\right] \quad .$$

Pour $j = \frac{1}{2}$ on sait que $D^{(j)}(X_2) = \frac{1}{2}\sigma_2$, où σ_2 est la 2-ième matrice de Pauli, donnée par

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Se rappeler qu'elle est une involution, c'est-à-dire $\sigma_2\sigma_2 = \mathrm{Id}$. Par conséquence

$$\begin{aligned}
d^{\frac{1}{2}}(\vartheta) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-i\vartheta}{2}\right)^n \frac{\sigma_2^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{i\vartheta}{2}\right)^{2k+1}\frac{\sigma_2^{2k+1}}{n!} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-i\vartheta}{2}\right)^{2k}\frac{\sigma_2^{2k}}{n!}\\
&= -\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\vartheta}{2}\right)^{2k+1}\cdot i\cdot(-1)^k\cdot\frac{\sigma_2}{n!} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\vartheta}{2}\right)^{2k}\cdot(-1)^k\cdot\frac{1}{n!}\\
&= -i\sigma_2\cdot\sin\frac{\vartheta}{2} + \cos\frac{\vartheta}{2} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\vartheta}{2} & -\sin\frac{\vartheta}{2} \\ \sin\frac{\vartheta}{2} & \cos\frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix} \quad .
\end{aligned}$$

Exercice 04

La représentation $D^{(\frac{1}{2})}$ de SO(3), donnée dans exercice (03) pour les rotations $R_{\mathbf{e}_2}(\cdot)$, est une représentation 2-dimensionelle dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Notons $D := D^{(1/2)}$. Soit $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ la base de $\mathbb{C}^2$ donnée par

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad .$$

On sait que par rapport à cette base, $D(R_{\mathbf{e}_2}(\vartheta))$ prend la forme

$$D(R_{\mathbf{e}_2}(\vartheta)) = \begin{pmatrix} e^{-i\vartheta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\vartheta/2} \end{pmatrix} \quad . \tag{2}$$

Le produit $D \otimes D$ est une représentation 4-diménsionelle, de SO(3) dans le groupe linéaire générale du produit tensoriel $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$. Elle agit comme

$$\underbrace{[D \otimes D]\,(R)}_{\in \mathrm{GL}(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)}\,\underbrace{(x \otimes y)}_{\in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2} := [D(R)(x)] \otimes [D(R)(y)] \quad \forall R \in \mathrm{SO}(3),\ x, y \in \mathbb{C}^2$$

Par rapport à la base

$$\{\underbrace{\mathbf{b}_1 \otimes \mathbf{b}_1}_{\mathbf{c}_1}, \underbrace{\mathbf{b}_1 \otimes \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_2 \otimes \mathbf{b}_1}_{\mathbf{c}_2}, \underbrace{\mathbf{b}_2 \otimes \mathbf{b}_2}_{\mathbf{c}_3}, \underbrace{\mathbf{b}_2 \otimes \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_1 \otimes \mathbf{b}_2}_{\mathbf{c}_4}\}$$

sur $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ la représentation $D \otimes D$ possède la matrice [1]

$$D \otimes D = \begin{pmatrix} D_{11}D_{11} & 2D_{11}D_{12} & D_{12}D_{12} & 0 \\ D_{11}D_{21} & D_{11}D_{22} + D_{21}D_{12} & D_{12}D_{22} & 0 \\ D_{21}D_{21} & 2D_{21}D_{22} & D_{22}D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11}D_{22} - D_{12}D_{21} \end{pmatrix} \quad .$$

En particulier

$$(D \otimes D)(R_{\mathbf{e}_2}(\vartheta)) \overset{(2)}{=} \begin{pmatrix} e^{-i\vartheta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\vartheta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

On sait que $D \otimes D$ est similaire à la somme $D^{(1)} \oplus D^{(0)}$. En particulier, $D^{(1)}$ est la représentation de SO(3) agissant sur le sous-espace engendré par les $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ et $D^{(0)} \equiv 1$ est la représentation triviale, agissant sur le sous espace engendré par $\mathbf{c}_4$. On peut donc extraire

$$D^{(1)}(R_{\mathbf{e}_2}(\vartheta)) \sim \begin{pmatrix} e^{-i\vartheta} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\vartheta} \end{pmatrix} \quad .$$

Par calcule direct, on vérifie que cela est la représentation de

$$D^{(1)}(R_{\mathbf{e}_2}(\vartheta)) \sim \begin{pmatrix} \cos\vartheta & 0 & -\sin\vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\vartheta & 0 & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

par rapport aux vecteurs (propres)

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \quad .$$

1. Noter que $(D \otimes D)(\mathbf{b}_i \otimes \mathbf{b}_j) = \sum_{k,l} D_{ki} D_{lj} \mathbf{b}_k \otimes \mathbf{b}_l$. Donc par exemple

$$\begin{aligned} (D \otimes D)(\mathbf{c}_3) &= (D \otimes D)(\mathbf{b}_1 \otimes \mathbf{b}_2) - (D \otimes D)(\mathbf{b}_2 \otimes \mathbf{b}_1) \\ &= D(\mathbf{b}_1) \otimes D(\mathbf{b}_2) - D(\mathbf{b}_2) \otimes D(\mathbf{b}_1) = (..) = (D_{11}D_{22} - D_{12}D_{21})\mathbf{c}_3 \quad . \end{aligned}$$