

# Théorie des Groupes et Symétries en Physique

UJF Grenoble - Semestre d'Hiver 2010/2011

Feuille d' Exercices 05 - Solutions

Stilianos Louca

24 novembre 2010

## Exercice 01

- (a) Car  $c^3 = 1 = \sigma_v^2$ , par la définition de  $D_3$ , il suffit à montrer que  $(c\sigma_v)^2 = 1$ . Cela est facile à voir géométriquement.
- (b) On considère l'action du groupe  $C_{3v}$  sur l'espace  $\mathbb{R}^3$  via transformations unitaires. On pose l'axe  $x_3$  le long OD, l'axe  $x_1$  le long OA et l'axe  $x_2$  comme  $x_2 := x_3 \times x_1$ . Par définition

$$D(\sigma_v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D(c) = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{3} & -\sin \frac{2\pi}{3} & 0 \\ \sin \frac{2\pi}{3} & \cos \frac{2\pi}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De cela on déduit les autres éléments

$$D(c^2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D(\sigma_v c) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D(\sigma_v c^2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (c) On va montrer qu'il peut exister un moment dipolaire électrique permanent  $\mathbf{P}$ . Si  $\mathbf{P}$  existerait, il serait un vecteur polaire et donc pour toute transformation  $g \in O(3)$  du solide il faudrait qu'il se transforme comme  $\mathbf{P} \mapsto g(\mathbf{P})$ . Si de plus  $g \in C_{3v}$  il faudrait que  $\mathbf{P}$  est invariant sous  $g$ , donc  $g(\mathbf{P}) \stackrel{!}{=} \mathbf{P}$ . En voyant que l'axe OD est un vecteur propre des générateurs  $c$  et  $\sigma_v$ , donc préservé par toute  $C_{3v}$ , on trouve que  $\mathbf{P} \sim \text{OD}$  est vraiment une possibilité valide. En fait, expériences montrent qu'il comprend 1.42 D.
- (d) Supposons que le cristal possède un moment magnétique dipolaire  $\boldsymbol{\mu} \neq 0$ . Alors, comme  $\boldsymbol{\mu}$  est axial, il change sous toute transformation unitaire  $U$  comme  $\boldsymbol{\mu} \mapsto \det(U) \cdot U\boldsymbol{\mu}$ . D'autre part, tout  $g \in C_{3v}$  préserve  $\boldsymbol{\mu}$ , c'est-à-dire  $\det(U) \cdot U\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}$ . En particulier,  $D(\sigma_v)\boldsymbol{\mu} = -\boldsymbol{\mu}$  et  $D(c)\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}$ . Mais le seul vecteur propre de  $D(c)$  à la valeur propre +1 est le long OD. Par contre,  $D(\sigma_v)$  préserve OD, une contradiction!

### Proposition 01

Soit  $G$  une groupe qui agit sur  $\mathbb{R}^3$  via transformations unitaires. Supposons que  $G$  contient une rotation non-triviale  $R$  autour le vecteur  $\mathbf{r}_0$  et une réflexion  $\sigma$  dans une plan contenant  $\mathbf{r}_0$ . Si  $G$  est une sous-groupe de la groupe de symétrie d'un cristal, alors le cristal ne possède pas un moment magnétique dipolaire.

**Preuve :** Supposons que le cristal possède un moment magnétique dipolaire  $\boldsymbol{\mu} \neq 0$ . Alors, comme  $\boldsymbol{\mu}$  est axial, il se transforme sous  $G$  comme  $\boldsymbol{\mu} \xrightarrow{g} \det(g) \cdot g\boldsymbol{\mu}$ . Par supposition,  $\boldsymbol{\mu}$  est préservé par  $G$ , donc  $\det(g) \cdot g\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}$  pour tous  $g \in G$ . En particulier  $R\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}$  et  $\sigma\boldsymbol{\mu} = -\boldsymbol{\mu}$ . Mais le seule vecteur propre de  $R$  est le long  $\mathbf{r}_0$ . Comme  $\sigma\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0$  cela donne une contradiction !

□

### Exercice 02

On note que  $\sigma$  commute avec tout  $g \in D_3$  ssi il commute avec ses générateurs  $c$  et  $\sigma_v$ . De

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & -\sigma_{12} & \sigma_{13} \\ -\sigma_{21} & \sigma_{22} & -\sigma_{23} \\ \sigma_{31} & -\sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = D(\sigma_v)\sigma D(\sigma_v)^{-1} \stackrel{!}{=} \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

on déduit la forme

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ \sigma_{31} & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} .$$

De

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} (\sigma_{11} + 3\sigma_{22}) & \sqrt{3}(\sigma_{22} - \sigma_{11}) & -2\sigma_{13} \\ \sqrt{3}(\sigma_{22} - \sigma_{11}) & (3\sigma_{11} + \sigma_{22}) & 2\sqrt{3}\sigma_{13} \\ -2\sigma_{31} & 2\sqrt{3}\sigma_{31} & 4\sigma_{33} \end{pmatrix} = D(c)\sigma D(c)^{-1} \stackrel{!}{=} \sigma$$

on déduit  $\sigma_{22} = \sigma_{11}$  et  $\sigma_{13} = 0 = \sigma_{31}$ . Donc, le tenseur de conductivité plus général compatible avec les transformations de symétrie  $D_3$  est de la forme

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} .$$

### Exercice 03

On utilise des coordonnées polaires pour  $m_1$  et coordonnées polaires transposées pour  $m_2$ . Soient  $\vartheta_1, \vartheta_2$  les angle entre les deux segments filiformes par rapport à l'axe  $z$ . Les positions des deux masses sont données par

$$z_1 = l \cos \vartheta_1, \quad x_1 = l \sin \vartheta_1 \quad ,$$

$$z_2 = z_1 + l \cos \vartheta_2 = l(\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2), \quad x_2 = x_1 + l \sin \vartheta_2 = l(\sin \vartheta_1 + \sin \vartheta_2) \quad .$$

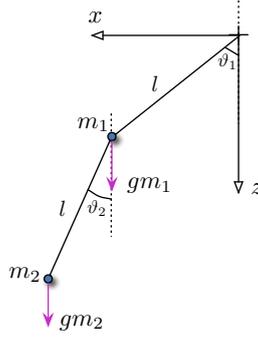


FIGURE 1: Sur exercice 03 : Double pendule.

Le Lagrangien est donné par

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = T - U &= \frac{m_1}{2} \cdot (\dot{x}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{m_2}{2} \cdot (\dot{x}_2^2 + \dot{z}_2^2) + m_1 g z_1 + m_2 g z_2 \\ &= \frac{m_1 l^2}{2} \cdot \left( \dot{\vartheta}_1^2 \cos^2 \vartheta_1 + \dot{\vartheta}_1^2 \sin^2 \vartheta_1 \right) + \frac{m_2 l^2}{2} \cdot \left[ \left( \dot{\vartheta}_1 \cos \vartheta_1 + \dot{\vartheta}_2 \cos \vartheta_2 \right)^2 + \left( \dot{\vartheta}_1 \sin \vartheta_1 + \dot{\vartheta}_2 \sin \vartheta_2 \right)^2 \right] \\ &\quad + l g \cdot [(m_1 + m_2) \cos \vartheta_1 + m_2 \cos \vartheta_2] \\ &= \frac{m_1 l^2 \dot{\vartheta}_1^2}{2} + \frac{m_2 l^2}{2} \cdot \left( \dot{\vartheta}_1^2 + \dot{\vartheta}_2^2 + 2 \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) \right) + l g \cdot [(m_1 + m_2) \cos \vartheta_1 + m_2 \cos \vartheta_2]\end{aligned}$$

Par cela, on obtient les équations du mouvement

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}_1} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta_1} = l^2 \cdot \left[ (m_1 + m_2) \ddot{\vartheta}_1 + m_2 \ddot{\vartheta}_2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) + m_2 \dot{\vartheta}_2^2 \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2) \right] + l g (m_1 + m_2) \sin \vartheta_1$$

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}_2} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta_2} = m_2 l^2 \cdot \left[ \ddot{\vartheta}_2 + \ddot{\vartheta}_1 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) - \dot{\vartheta}_1^2 \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2) \right] + l g m_2 \sin \vartheta_2$$

On considère des petites oscillations et néglige les termes d'ordre plus grand que 1 en  $\vartheta_1, \vartheta_2$ , c'est-à-dire on considère

$$\sin \vartheta_1 \approx \vartheta_1, \quad \sin \vartheta_2 \approx \vartheta_2, \quad \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) \approx 1, \quad \vartheta_k^2 \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2) \approx 0$$

Alors, les équations de mouvement se simplifient à

$$l^2 \cdot \left[ (m_1 + m_2) \ddot{\vartheta}_1 + m_2 \ddot{\vartheta}_2 \right] + l g (m_1 + m_2) \vartheta_1 = 0 \Rightarrow \ddot{\vartheta}_1 = -\frac{g}{l} \cdot \vartheta_1 - \frac{m_2}{(m_1 + m_2)} \cdot \ddot{\vartheta}_2$$

$$m_2 l^2 \left( \ddot{\vartheta}_1 + \ddot{\vartheta}_2 \right) + l g m_2 \vartheta_2 = 0 \Rightarrow \ddot{\vartheta}_2 = -\frac{g}{l} \cdot \vartheta_2 - \ddot{\vartheta}_1$$

$$\rightarrow \ddot{\vartheta}_1 = -\frac{g(m_1 + m_2)}{l m_1} \cdot \vartheta_1 + \frac{g m_2}{l m_1} \cdot \vartheta_2, \quad \ddot{\vartheta}_2 = \frac{g(m_1 + m_2)}{l m_1} \cdot (\vartheta_1 - \vartheta_2)$$

On demande

$$\vec{\vartheta} := \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{pmatrix} = e^{i\omega t} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = e^{i\omega t} \cdot \vec{A}$$

pour une fréquence  $\omega$ . Par les équations de mouvement on trouve donc

$$A_1 \cdot \left[ \omega^2 - \frac{g(m_1 + m_2)}{l m_1} \right] + A_2 \cdot \frac{g m_2}{l m_1} = 0$$

$$A_1 \cdot \frac{g(m_1 + m_2)}{l m_1} + A_2 \cdot \left[ \omega^2 - \frac{g(m_1 + m_2)}{l m_1} \right] = 0$$

c'est-à-dire

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \omega^2 - \frac{g(m_1+m_2)}{lm_1} & \frac{gm_2}{lm_1} \\ \frac{g(m_1+m_2)}{lm_1} & \omega^2 - \frac{g(m_1+m_2)}{lm_1} \end{pmatrix}}_C \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0 .$$

Cela est un problème de valeurs propres en  $\omega$ , qui se résolve à

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{g}{lm_1} \cdot \left[ (m_1 + m_2) \pm \sqrt{m_2(m_1 + m_2)} \right]} ,$$

avec les vecteurs propres

$$\vec{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_2}} \end{pmatrix} , \quad \vec{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_2}} \end{pmatrix} .$$

## Exercice 04

Considérons le potentiel central et le groupe  $\text{SO}(3)$ , sous le quel le Hamiltonien correspondant  $H$  est invariant. Selon [1], les représentations irréductibles  $D^{(l)}$  de  $\text{SO}(3)$  sont caractérisés par leur dimensionnalité  $(2l + 1)$ , où  $l \in \mathbb{N}_0$ . Leur caractères sont donnés par

$$\chi^{(l)}(\vartheta) = \frac{\sin \left[ \left( l + \frac{1}{2} \right) \vartheta \right]}{\sin(\vartheta/2)} , \quad \vartheta \in \mathbb{R} , \quad (1)$$

où  $\vartheta$  correspond à l'angle de rotation d'un élément donné dans  $\text{SO}(3)$ . Toute  $D^{(l)}$  correspond au (agit sur le) sous-espace propre de  $H$  de nombre quantique orbital  $l \in \mathbb{N}_0$ , de dégénérescence  $(2l + 1)$ .

Soit  $V$  une perturbation du potentiel, de groupe de symétrie  $G \leq \text{SO}(3)$ . La représentation  $D^{(l)}$  induit (par restriction) la représentation  $D_G^{(l)}$ , qui ne doit pas impérativement être irréductible. Si  $D_G^{(l)} = \bigoplus_i D_{(i)}$  et une décomposition de  $D_G^{(l)}$  aux irréductibles  $D_{(i)}$  (pas forcément deux à deux inégales), chaque  $D_{(i)}$  correspond à un sous-espace  $D_G^{(l)}$ -invariant et en particulier un sous-espace propre du Hamiltonien  $H + V$ .

- (a) Considérons une perturbation  $V$  du groupe de symétrie  $G := D_6 \leq \text{SO}(3)$ , engendré par la rotation  $c$  d'ordre 6 autour de  $x_3$  et la rotation  $b$  d'ordre  $\pi$  autour de  $x_1$ . On se rappelle aux classes de conjugaison de  $D_6$ , donnés par

$$\underbrace{\{1\}}_E, \quad \underbrace{\{c, c^5\}}_{C_6 \text{ rotation par } \frac{\pi}{3}}, \quad \underbrace{\{c^2, c^4\}}_{C_6^2 \text{ rotation par } \frac{2\pi}{3}}, \quad \underbrace{\{c^3\}}_{C_6^3 \text{ rotation par } \pi}, \quad \underbrace{\{b, bc^2, bc^4\}}_{C_2 \text{ rotation par } \pi}, \quad \underbrace{\{bc, bc^3, bc^5\}}_{C_2' \text{ rotation par } \pi} .$$

(vois exercice 4.5). Par exercice 4.5, les représentations irréductibles de  $D_6$  sont caractérisées par les caractères

$D_6$	$E$	$2C_6$	$2C_6^2$	$C_6^3$	$3C_2$	$3C_2'$
$A_1$	1	1	1	1	1	1
$A_2$	1	1	1	1	-1	-1
$B_1$	1	-1	1	-1	1	-1
$B_2$	1	-1	1	-1	-1	1
$E_1$	2	1	-1	-2	0	0
$E_2$	2	-1	-1	2	0	0

TABLE 1: Caractères des irréductibles de  $D_6$ .

De (2) et (3) on trouve pour les états  $l = 1$  et  $l = 2$  les caractères des restrictions  $D_G^{(l)}$

$$\begin{aligned}\chi_G^{(1)}(E, C_6, C_6^2, C_6^3, C_2, C_2') &= \left(\chi^{(1)}(0), \chi^{(1)}\left(\frac{\pi}{3}\right), \chi^{(1)}\left(\frac{2\pi}{3}\right), \chi^{(1)}(\pi), \chi^{(1)}(\pi), \chi^{(1)}(\pi)\right) \\ &= (3, 2, 0, -1, -1, -1)\end{aligned}$$

$$\chi_G^{(2)}(E, C_6, C_6^2, C_6^3, C_2, C_2') = (5, 1, -1, 1, 1, 1)$$

Comme

$$\chi_G^{(1)} = \chi_{A_2} + \chi_{E_1}, \quad \chi_G^{(2)} = \chi_{A_1} + \chi_{E_1} + \chi_{E_2},$$

on conclut que :

- Le niveau  $l = 1$  se sépare à deux niveaux, 1-fois et 2-fois dégénéré respectivement.
  - Le niveau  $l = 2$  se sépare à trois niveaux, 1-fois, 2-fois et 2-fois dégénéré respectivement.
- (b) Considérons une perturbation  $V$  de groupe de symétrie  $G := D_3 \leq \text{SO}(3)$ , engendré par la rotation  $c$  d'ordre 3 autour de  $x_3$  et la rotation  $b$  d'ordre  $\pi$  autour de  $x_1$ . On se rappelle aux classes de conjugaison de  $D_3$ , donnés par

$$\underbrace{\{1\}}_E, \quad \underbrace{\{c, c^2\}}_{C_3}, \quad \underbrace{\{b, bc, bc^2\}}_{C_2}.$$

rotation par  $\frac{2\pi}{3}$     rotation par  $\pi$

Les représentations irréductibles de  $D_3$  sont caractérisées par les caractères

$D_3$	$E$	$C_3$	$C_2$
$A_1$	1	1	1
$A_2$	1	1	-1
$E_1$	2	-1	0

**TABLE 2:** Caractères des irréductibles de  $D_3$ .

De même comme ci-dessus, on trouve pour les états  $l = 1$  et  $l = 2$  les caractères des restrictions  $D_G^{(l)}$

$$\begin{aligned}\chi_G^{(1)}(E, C_3, C_2) &= (3, 0, -1) = \chi_{A_2} + \chi_{E_1} \\ \chi_G^{(2)}(E, C_3, C_2) &= (5, -1, 1) = \chi_{A_1} + 2\chi_{E_1}\end{aligned}$$

On conclut :

- Le niveau  $l = 1$  se sépare à deux niveaux, 1-fois et 2-fois dégénéré respectivement.
  - Le niveau  $l = 2$  se sépare à trois niveaux, 1-fois, 2-fois et 2-fois dégénéré respectivement.
- (c) Comme tous les représentations irréductibles de  $C_3$  sont un-dimensionnels, il n'existe pas de sous-espaces invariants de  $C_3$  de dimension plus haut. En particulier, toute dégénérescence est annulée.

**Plus détaillé :** Les classes de conjugaison de  $G := C_3 \leq \text{SO}(3)$  sont donnés par

$$\{1\}, \{c\}, \{c^2\}.$$

Les représentations irréductibles (sur le corps  $\mathbb{R}$ ) de  $C_3$  sont caractérisées par les caractères

$C_3$	1	$c$	$c^2$
$A_1$	1	1	1
$E_1$	1	$\omega$	$\omega^2$
$E_2$	1	$\omega^2$	$\omega$

**TABLE 3:** Caractères des irréductibles de  $C_3$ .

avec  $\omega := e^{i2\pi/3}$ . On trouve pour  $D_G^{(l)}$ ,  $l = 1, 2$  les caractères<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}\chi_G^{(1)}(1, c, c^2) &= (3, 0, 0) = \chi_{A_1} + \chi_{E_1} + \chi_{E_2} \\ \chi_G^{(2)}(1, c, c^2) &= (5, -1, -1) = \chi_{A_1} + 2\chi_{E_1} + 2\chi_{E_2}.\end{aligned}$$

---

1. Noter que  $\omega + \omega^2 = -1$ .

On conclut que :

- Le niveau  $l = 1$  se sépare à trois niveaux pas dégénérés.
- Le niveau  $l = 2$  se sépare à cinq niveaux pas dégénérés.

### Quelques remarques sur représentations de $O(3)$

Considérons le potentiel central et le groupe  $SO(3)$ , sous le quel le Hamiltonien correspondant  $H$  est invariant. Selon [1], les représentations irréductibles  $D^{(l)}$  de  $SO(3)$  sont caractérisés par leur dimensionnalité  $(2l + 1)$ , où  $l \in \mathbb{N}_0$ . Pour rotations au tour de l'axe  $x_3$  par l'angle  $\vartheta$ , ils sont données par

$$D^{(l)}(\vartheta) = \begin{pmatrix} e^{-il\vartheta} & & & \\ & e^{-i(l-1)\vartheta} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{il\vartheta} \end{pmatrix} .$$

Leur caractères sont donnés par

$$\chi^{(l)}(\vartheta) = \frac{\sin \left[ \left( l + \frac{1}{2} \right) \vartheta \right]}{\sin(\vartheta/2)} , \quad \vartheta \in \mathbb{R} , \quad (2)$$

où  $\vartheta$  correspond à l'angle de rotation d'un élément donné dans  $SO(3)$ . Toute  $D^{(l)}$  correspond au (agit sur le) sous-espace propre de  $H$  de nombre quantique orbital  $l \in \mathbb{N}_0$ , de dégénérescence  $(2l + 1)$ .

On se rappelle que le groupe de symétrie d'un potentiel central est

$$O(3) = C_2 \times SO(3) ,$$

où  $C_2 = \{1, \sigma\}$  est le groupe engendré par l'inversion par l'origine. Chaque représentation  $D^{(l)}$  de  $SO(3)$  engendre deux représentations  $D^{(l\pm)}$  de  $O(3)$ , possédant les valeurs

$$D^{(l+)}(\sigma R) = D^{(l+)}(R) = D^{(l-)}(R) = -D^{(l-)}(\sigma R) , \quad (3)$$

où  $R \in SO(3)$ .

Soit  $V$  une perturbation du potentiel, de groupe de symétrie  $G \leq O(3)$ . Les représentations  $D^{(l\pm)}$  induisent (par restriction) les deux représentations  $D_G^{(l\pm)}$ , qui ne doivent pas impérativement être irréductibles. Note que tout sous-espace  $V \subseteq \mathbb{R}^{(2l+1)}$  est invariant à  $D_G^{(l+)}$  ssi il est invariant à  $D_G^{(l-)}$ . On peut donc se restreindre à la représentation  $D_G^{(l+)}$ . Si  $D_G^{(l+)} = \bigoplus_i D_{(i)}$  et une décomposition de  $D_G^{(l+)}$  aux irréductibles  $D_{(i)}$  (pas forcément deux à deux inégales), chaque  $D_{(i)}$  correspond à un sous-espace  $D_G^{(l+)}$ -invariant et en particulier un sous-espace propre du Hamiltonien  $H + V$ .

### Références

- [1] Hamermesh, *Group Theory and its Applications to Physical Problems*  
Dover Publications, 1989