Théorie des Groupes et Symétries en Physique

UJF Grenoble - Semestre d'Hiver 2010/2011

Feuille d' Exercices 04 - Solutions

Stilianos Louca

6 janvier 2011

Exercice 01

Par feuillet 01, exercice 01, le table de Cayley du groupe diédral $D_3 = \text{gp}\{b, c\}$ où $b^2 = c^3 = (bc)^2 = 1$ est le suivent :

	e	c	c^2	b	bc	bc^2
e	e	c	c^2	b	bc	bc^2
c	c	c^2	e	bc^2	b	bc
c^2	c^2	e	c	bc	bc^2	b
b	b	bc	bc^2	e	c	c^2
bc	bc	bc^2	b	c^2	e	c
bc^2	bc^2	b	bc	c	c^2	e

Table 1: Table de Caley du D_3.

On cherche un homomorphisme $D : D_3 \to \text{GL}_2(\mathbb{R})$ tel que $D(g)$ correspond à l'action de g dans $\mathbb{R}^2$. Pour ça, il suffit à trouver les valeurs $D(b)$ et $D(c)$, car les b, c engendrent D_3. On sait que b agit sur $\mathbb{R}^2$ comme une réflexion par rapport à l'axe x. De même, on sait que c agit sur $\mathbb{R}^2$ comme rotation au tour l'origine par l'angle $2\pi/3$. Donc $D(b)$ et $D(c)$ possèdent les représentations

$$D(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad D(c) = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{3} & -\sin\frac{2\pi}{3} \\ \sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad .$$

De cela on déduire les autres éléments

$$D(c^2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad , \quad D(bc) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$D(bc^2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad , \quad D(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où on déduit

$$\frac{1}{|D_3|}\sum_{g\in D_3} D_{11}(g)\cdot \underbrace{D_{11}(g^{-1})}_{D_{11}^*(g)} = \frac{1}{6}\cdot\left[1\cdot 1+\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}+1\cdot 1\right] = \frac{1}{2} = \frac{\delta_{11}\delta_{11}}{\dim D}$$

$$\frac{1}{|D_3|}\sum_{g\in D_3} D_{11}(g)\cdot D_{12}^*(g) = \frac{1}{6}\cdot\left[1\cdot 0+\tfrac{1}{2}\tfrac{\sqrt{3}}{2}-\tfrac{1}{2}\tfrac{\sqrt{3}}{2}+\tfrac{1}{2}\tfrac{\sqrt{3}}{2}-\tfrac{1}{2}\tfrac{\sqrt{3}}{2}+1\cdot 0\right] = 0 = \frac{\delta_{11}\delta_{12}}{\dim D}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{|D_3|}\sum_{g\in D_3} D_{21}(g)\cdot D_{12}^*(g) = \frac{1}{6}\cdot\left[0\cdot 0-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\tfrac{\sqrt{3}}{2}-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\tfrac{\sqrt{3}}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\tfrac{\sqrt{3}}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\tfrac{\sqrt{3}}{2}+0\cdot 0\right] = 0 = \frac{\delta_{21}\delta_{12}}{\dim D}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{|D_3|}\sum_{g\in G} D_{22}(g)\cdot D_{22}^*(g) = \frac{1}{6}\cdot\left[1\cdot 1+\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}+1\cdot 1\right] = \frac{1}{2} = \frac{\delta_{22}\delta_{22}}{\dim D} \quad ,$$

ce qui vérifie la formula générale

$$\frac{1}{|D_3|}\sum_{g\in D_3} D_{ij}(g)\cdot D_{kl}^*(g) = \frac{\delta_{ik}\delta_{jl}}{\dim D} \quad .$$

Exercice 02

(a) Il faut montrer que $D^* : g \mapsto D^*(g)$ est un homomorphisme. Mais vraiment, pour $g_1, g_2 \in G$ on trouve

$$D^*(g_1g_2) = [D(g_1)D(g_2)]^* = D^*(g_1)D^*(g_2) \quad .$$

(b) Car D est irréductible et

$$DCC^* = CD^*C^* = (C^*DC)^* = (C^*CD^*)^* = CC^*D \quad ,$$

par lemme de Schur on déduit que $CC^* = \lambda\,\mathrm{Id}$ pour un $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

(c) De $D^* = C^{-1}DC$ il suit que $CD^* = DC$ et $D^{-1}C = C(D^*)^{-1}$. Donc

$$CC^\dagger D = C(D^\dagger C)^\dagger = C(D^{-1}C)^\dagger = C\left[C(D^*)^{-1}\right]^\dagger = CD^*C^\dagger = DCC^\dagger$$

et par Schur $CC^\dagger = \mu\,\mathrm{Id}$ pour un $\mu \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

(d) Car $CC^\dagger = \mu\,\mathrm{Id}$ et donc $CC^\dagger = (CC^\dagger)^\dagger = \mu^*\,\mathrm{Id}$, on déduit que $\mu \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Pose $\nu := 1/\sqrt{|\mu|}$, alors $\widetilde{C} := \nu C$ satisfait aussi $D^* = \widetilde{C}^{-1}D\widetilde{C}$. De plus

$$\widetilde{C}\widetilde{C}^\dagger = \frac{\mu}{|\mu|}\,\mathrm{Id} = \mathrm{sgn}(\mu)\cdot\mathrm{Id} \in \{\pm\,\mathrm{Id}\} \quad .$$

On suppose donc $CC^\dagger \in \{\pm\,\mathrm{Id}\}$. En particulier, $C = \pm C^{-1\dagger}$. Car $CC^* = \lambda\,\mathrm{Id}$ on sait $C = \lambda(C^*)^{-1}$ et donc

$$C = \pm C^{-1\dagger} = \pm\left[\lambda C^{-1*}\right]^{-1\dagger} = \pm\frac{C^T}{\lambda^*} \quad .$$

D'autre part, si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est tel que $A = \alpha A^T$ pour un $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, on sait que $A = A^{TT} = \alpha A^T = \alpha^2 A$ et donc $\alpha \in \{\pm 1\}$. On conclut

$$C = \pm C^T \quad ,$$

c'est-à-dire C est symétrique ou antisymétrique.

Exercice 03

Car $D^{(\nu)}$ est irréductible, par lemme de Shur il suffit à montrer que

$$D^{(\nu)}(g_0) \cdot B^i_\nu \cdot \left(D^{(\nu)}(g_0)\right)^{-1} = B^\nu_i \quad \forall g_0 \in G \tag{1}$$

Mais vraiment

$$D^{(\nu)}(g) B^i_\nu \big(D^{(\nu)}(g)\big)^{-1} = \sum_{g \in K_i} D^{(\nu)}(g_0) D^{(\nu)}(g) D^{(\nu)}(g_0^{-1}) = \sum_{g \in K_i} D^{(\nu)}(g_0 g g_0^{-1}) \quad ,$$

et car l'automorphisme intérieur associé à $g_0 \in G$ préserve les classes de conjugaison, on en déduit eq. (1). En prenant la trace de B^ν_i on trouve

$$\lambda^\nu_i \cdot n_\nu = \mathrm{trace}(B^\nu_i) = \sum_{g \in K_i} \underbrace{\mathrm{trace}\left[D^{(\nu)}(g)\right]}_{\text{const. dans } K_i} = g_i \cdot \chi^\nu_i$$

où $g_i := |K_i|$, donc

$$\chi^\nu_i = \frac{\lambda^\nu_i \cdot n_\nu}{g_i} \quad . \tag{2}$$

Par la normalité des caractères on sait que

$$1 = \delta^{\nu\nu} = \frac{1}{|G|} \sum_i g_i \chi^\nu_i \chi^{\nu *}_i \overset{(2)}{=} \frac{1}{|G|} \sum_i \frac{1}{g_i} \left|\lambda^\nu_i\right|^2 n_\nu^2 = \frac{n_\nu^2}{|G|} \sum_i \frac{\left|\lambda^\nu_i\right|^2}{g_i}$$

et donc

$$\boxed{n_\nu = \sqrt{\frac{|G|}{\sum_i \frac{|\lambda^i_\nu|^2}{g_i}}} \quad .}$$

Exercice 04

On considère la décomposition

$$D = \sum_\nu a_\nu D^{(\nu)}$$

de D en représentations irréductibles. Alors

$$\sum_i g_i \left|\chi_i\right|^2 = \sum_i g_i \cdot \chi_i \chi_i^* = \sum_i g_i \cdot \sum_\nu a_\nu \chi^\nu_i \sum_\mu a_\mu (\chi^\mu_i)^* = \sum_{\nu,\mu} a_\nu a_\mu \underbrace{\sum_i g_i \chi^\nu_i (\chi_i)^\mu}_{|G| \cdot \delta^{\nu\mu}} = |G| \cdot \sum_\mu a_\mu^2 \quad .$$

Si D était irréductible, alors $D = D^{(\mu_0)}$ pour une seule irréductible $D^{(\mu_0)}$ et donc

$$\sum_\mu a_\mu^2 = a_{\mu_0}^2 = 1 \quad .$$

Si inversement $\sum_\mu a_\mu^2 = 1$, alors $a_\mu = 0$ pour qu'un irréductible μ_0. Donc D est lui même cet irréductible. $\square$

Exercice 05

On se rappelle que les classes de conjugaison de D_6 sont

$$\underbrace{\{1\}}_{E},\ \underbrace{\{c^3\}}_{C_6^3},\ \underbrace{\{c^2,c^4\}}_{C_6^2},\ \underbrace{\{c,c^5\}}_{C_6},\ \underbrace{\{b,bc^2,bc^4\}}_{C_2},\ \underbrace{\{bc,bc^3,bc^5\}}_{C_2'}\quad .$$

Car les b,c engendre D_6, le groupe quotient D_6/N avec $N := \{1,c^3\}$ est donné par

$$D_6/N = \{\ \underbrace{\{1,c^3\}}_{1N=c^3N},\underbrace{\{c,c^4\}}_{cN=c^4N},\underbrace{\{c^2,c^5\}}_{c^2N=c^5N},\underbrace{\{b,bc^3\}}_{bN=bc^3N},\underbrace{\{bc,bc^4\}}_{bcN=bc^4N},\underbrace{\{bc^2,bc^5\}}_{bc^2N=bc^5N}\ \}$$

et est engendré par les classes cN et bN. En fait, ils satisfont $(cN)^3 = (bN)^2 = (bNcN)^2 = 1$, c'est-à-dire l'association

$$\Phi : \underbrace{(1N,cN,bN)}_{\in(D_6/N)^3} \mapsto \underbrace{(1,c,b)}_{\in(D_3)^3}$$

est un isomorphisme entre D_6/N et D_3.

On sait que la représentation D_3 possède les représentations irréductibles $D_{xy} : D_3 \to O(2)$ (exo. 01), $D_z : D_3 \to \{1\}$ (triviale) et $D_s : D_3 \to \mathbb{C}$ donnée par

$$D_s(c) = 1 \quad , \quad D_s(b) = -1 \quad .$$

Leurs caractères sont donnés par

$$\begin{aligned}
\chi_0 &: \big(1,b,c,c^2,bc,bc^2\big) \mapsto (1,-1,1,1,-1,-1)\\
\chi_z &: \big(1,b,c,c^2,bc,bc^2\big) \mapsto (1,1,1,1,1,1)\\
\chi_{xy} &: \big(1,b,c,c^2,bc,bc^2\big) \mapsto (2,0,-1,-1,0,0)
\end{aligned}$$

Si $\Pi : D_6 \to D_6/N$ est l'homomorphisme quotient, alors la représentation induite $D_{xy}^{\mathrm{rel}} := D_{xy}\circ\Phi\circ\Pi : D_6 \to O(2)$ possède les caractères

$$\begin{aligned}
\chi_{xy}^{\mathrm{rel}}(1) &= \chi_{xy}^{\mathrm{rel}}(c^3) = \chi_{xy}\circ\Phi(1N) = \chi_{xy}(1) = 2\\
\chi_{xy}^{\mathrm{rel}}(c) &= \chi_{xy}^{\mathrm{rel}}(c^4) = \chi_{xy}\circ\Phi(cN) = \chi_{xy}(c) = -1\\
\chi_{xy}^{\mathrm{rel}}(c^2) &= \chi_{xy}^{\mathrm{rel}}(c^5) = \chi_{xy}(c^2) = -1\\
\chi_{xy}^{\mathrm{rel}}(b) &= \chi_{xy}^{\mathrm{rel}}(bc^3) = \chi_{xy}(b) = 0\\
\chi_{xy}^{\mathrm{rel}}(bc) &= \chi_{xy}^{\mathrm{rel}}(bc^4) = \chi_{xy}(bc) = 0\\
\chi_{xy}^{\mathrm{rel}}(bc^2) &= \chi_{xy}^{\mathrm{rel}}(bc^5) = \chi_{xy}(bc^2) = 0
\end{aligned}$$

ou autrement écrit

$$\chi_{xy}^{\mathrm{rel}} : \big(E,2C_6,2C_6^2,C_6^3,3C_2,3C_2'\big) \mapsto (2,-1,-1,2,0,0)\quad .$$

On déduit donc que les représentations D_{xy}^{rel} et E_2 sont équivalentes.

De même, la représentation induite $D_s\circ\Phi\circ\Pi : D_6 \to \mathbb{C}$ possède les caractères

$$\chi_s^{\mathrm{rel}} : (1,c,c^2,c^3,c^4,c^5,b,bc,bc^2,bc^3,bc^4,bc^5) \mapsto (1,1,1,1,1,1,-1,-1,-1,-1,-1,-1)$$

ou autrement dit

$$\chi_s^{\mathrm{rel}} : \big(E,2C_6,2C_6^2,C_6^3,3C_2,3C_2'\big) \mapsto (1,1,1,1,-1,-1)\quad .$$

On déduit donc que les représentations D_s^{rel} et A_2 sont équivalentes.

Évidement, la représentation induite $D_z\circ\Phi\circ\Pi : D_6 \to \{1\}$ est égale à A_1.

$\square$

Remarque : On a vu dans exercice (3.3), que toute représentation $D^{G/N} : G/N \to \mathrm{GL}(V)$ induit une représentation $D^G := D^{G/N}\circ\Pi : G \to \mathrm{GL}(V)$, où $\Pi : G \to G/N$ est l'homomorphisme quotient. Par surjectivité de Π, $D^{G/N}$ est irréductible ssi la représentation induite D^G est irréductible. Noter que par l'universalité du groupe quotient G/N, ce sont exactement les représentations $D : G \to \mathrm{GL}(V)$ satisfaisant $D(N) = \{1\}$, qui sont induit en ce façon. Donc, dans le cas ci-dessus, il faut que $A_1(N) = A_2(N) = E_2(N) = \{1\}$.