EXERCICES 04

1. Construire les matrices de la représentation [2] de D_3, qui agit sur x et y, et vérifier le théorème fondamental d'orthogonalité pour les matrices.
2. Lemmes de Schur.
   (a) Si $D(g)$ est une représentation du groupe G, montrer que les matrices $D^*(g)$ forment aussi une représentation.
   (b) Si les deux représentations sont équivalentes, c.à.d. $D^*(g) = C^{-1}D(g)C$, et si D est irréductible, montrer que $CC^* = \lambda I$.
   (c) Si en plus D est unitaire, montrer que $CC^\dagger = \mu I$.
   (d) Montrer que C peut être redéfinie tel que $\mu = 1$ et qu'alors C est soit symétrique, soit anti-symétrique.
3. Montrer que la matrice

$$B_i^\nu \ := \ \sum_{g \in K_i} D^{(\nu)}(g),$$

c.à.d. la somme des matrices d'une représentation irréductible $[n_\nu]$ correspondant aux éléments d'une classe de conjugaison K_i, est un multiple de l'identité, $B_i^\nu = \lambda_i^\nu I$. Le coefficient λ_i^ν est appelé *caractère de Dirac* de la classe K_i. Prendre les traces dans cette équation, relier le caractère de Dirac aux caractères ordinaires χ_i^ν et obtenir ainsi la dimension n_ν en termes de $[g]$, g_k et λ_k^ν.

4. Soit D une représentation générale d'un groupe fini G avec caractères χ_i. En considérant sa décomposition en représentations irréductibles, montrer que

$$\sum_i g_i |\chi_i|^2 \ = \ [g] \sum_\mu a_\mu^2$$

et donc qu'une condition nécessaire et suffisante pour l'irréductibilité de D est $\sum_i g_i |\chi_i|^2 = [g]$.

5. En se rappelant de l'exercice 3.3, on voit que l'on peut obtenir les caractères du groupe G à partir de ceux du groupe quotient G/N,

$$\chi^G(g) \ = \ \chi^{G/N}(gN).$$

Considérons le cas de D_6. Il a un sousgroupe normal C_2 (le centre) généré par c^3, et la structure du groupe facteur D_6/C_2 est D_3. Montrer que les caractères des représentations irréductibles A_1, A_2, E_2 donnés ci-dessous peuvent être relevés de ceux de D_3.

D_6	E	$2C_6$	$2C_6^2$	C_6^3	$3C_2$	$3C_2'$
A_1	1	1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	1	-1	-1
B_1	1	-1	1	-1	1	-1
B_2	1	-1	1	-1	-1	1
E_1	2	1	-1	-2	0	0
E_2	2	-1	-1	2	0	0