Théorie des Groupes et Symétries en Physique

UJF Grenoble - Semestre d'Hiver 2010/2011

Feuille d' Exercices 03 - Solutions

Stilianos Louca

3 octobre 2010

Exercice 01

Soit $V := \{f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}\}$ l'espace des fonctions complexes sur $\mathbb{R}^3$ et $R_\alpha \in \mathrm{Aut}(V)$ l'automorphisme sur V qui tourne tout fonction $f \in V$ autour l'axe z par l'angle α, ça veut dire $(R_\alpha f)(\mathbf{x}) := f(R_\alpha^{-1}\mathbf{x})$. Alors les fonctions

$$f_1(\mathbf{x}) = -\frac{r}{\sqrt{2}}(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot\sin\vartheta$$

$$f_2(\mathbf{x}) = r\cos\vartheta$$

$$f_3(\mathbf{x}) = \frac{r}{\sqrt{2}}(\cos\varphi - i\sin\varphi)\sin\vartheta$$

(dans les coordonnées sphériques, ϑ : colatitude) sont transformé comme

$$\begin{aligned}
(R_\alpha f_1)(\mathbf{x}) &= -\frac{r}{\sqrt{2}}\left[\cos(\varphi-\alpha) + i\sin(\varphi-\alpha)\right]\cdot\sin\vartheta \\
&= -\frac{r}{\sqrt{2}}\left[\cos\varphi\cos\alpha + \sin\varphi\sin\alpha + i\sin\varphi\cos\alpha - i\cos\varphi\sin\alpha\right]\cdot\sin\vartheta \\
&= f_1(\mathbf{x})\cdot[\cos\alpha - i\sin\alpha] = f_1(\mathbf{x})\cdot e^{-i\alpha}
\end{aligned}$$

$$(R_\alpha f_2)(\mathbf{x}) = f_2(\mathbf{x})$$

$$\begin{aligned}
(R_\alpha f_3)(\mathbf{x}) &= \frac{r}{\sqrt{2}}\left[\cos\varphi\cos\alpha + \sin\varphi\sin\alpha - i\sin\varphi\cos\alpha + i\cos\varphi\sin\alpha\right]\cdot\sin\vartheta \\
&= f_3(\mathbf{x})\cdot(\cos\alpha + i\sin\alpha) = f_3(\mathbf{x})\cdot e^{i\alpha}
\end{aligned}$$

Donc, le sous-espace vectoriel $\mathrm{span}\{f_1, f_2, f_3\} \subseteq V$ est R_α-invariant et R_α possède par rapport de cette base la représentation

$$R_\alpha \cong \begin{pmatrix} e^{-i\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\alpha} \end{pmatrix} \quad .$$

Évidement, cette représentation du groupe $\{R_\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\}$ est entièrement réductible. Elle admit le caractère

$$\{\mathrm{trace}(R_\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{2\cos\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\} = [-2, 2] \quad .$$

Par ailleurs, les fonctions $g_1 := x,\ g_2 := y,\ g_3 := z$ sont combinaisons linéaires des f_1, f_2, f_3 et linéairement indépendants, donc span $\{g_i\}_{i=1}^3 = \text{span}\,\{f_i\}_{i=1}^3$. En particulier, on a

$$(R_\alpha g_1)(\mathbf{x}) = r\cos(\varphi - \alpha)\sin\vartheta = r\left[\cos\varphi\cos\alpha + \sin\varphi\sin\alpha\right]\cdot\sin\vartheta = f_1(\mathbf{x})\cdot\cos\alpha + f_2(\mathbf{x})\cdot\sin\alpha$$

$$(R_\alpha g_2)(\mathbf{x}) = r\left[\sin\varphi\cos\alpha - \cos\varphi\sin\alpha\right]\cdot\sin\vartheta = f_2(\mathbf{x})\cdot\cos\alpha - f_1(\mathbf{x})\cdot\sin\alpha$$

$$(R_\alpha g_3)(\mathbf{x}) = g_3(\mathbf{x})$$

et donc par rapport de cette base, le groupe $\{R_\alpha\}$ a le représentation

$$R_\alpha \cong \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et bien sûr le même caractère

$$\{2\cos\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\} = [-2, 2] \quad .$$

Exercice 02

Parce que

$$D(c) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \ ,\ D(c)^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ ,\ D(x)^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1_{2\times 2}$$

cette définition génère vraiment une représentation de C_3. Suppose que D est réductible sur $\mathbb{R}$, c.a.d. il existe un sous-espace vectoriel propre $\{0\} \neq V \subsetneq \mathbb{R}^2$ tel que $D(c)(V) \subseteq V$, c.a.d. $D(c)$ a un vecteur propre non-trivial. Mais en fait $D(c)$ n'a pas des valeurs propres réelles, car

$$\det(\lambda - D(c)) = \lambda^2 + \lambda + 1 > 0 \quad \forall\ \lambda \in \mathbb{R} \quad ,$$

donc D est irréductible.

Exercice 03

L'application

$$Q : G \to G/N \quad , \quad g \mapsto gN$$

est comme sait un homomorphisme des groupes. Par définition, la représentation $D^{G/N} : G/N \to \mathrm{GL}(V)$ de groupe G/N est un homomorphisme. Donc, la composition $D := D^{G/N} \circ Q : G \to \mathrm{GL}(V)$ est aussi un homomorphisme.

Exercice 04

Remarque 01

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $a_1, .., a_n \in V$ linéairement indépendant et $b_1, .., b_m \in V$ tels que $a_1, .., a_n, b_1, .., b_m$ sont linéairement dépendant et engendrent V. Alors il existe un $j_0 \in \{1, .., m\}$ tel que $a_1, .., a_n, b_1, .., b_{j_0-1}, b_{j_0+1}, .., b_m$ engendre encore V.

Preuve : Ils existent $\lambda_1, .., \lambda_n, \mu_1, .., \mu_m \in \mathbb{K}$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_j b_j = 0$$

et pas tous λ_i, μ_j sont nul. Car les $a_1, .., a_n$ sont linéairement indépendant, il faut que au moins un $\mu_{j_0} \neq 0$. Le vecteur correspondant b_{j_0} est donc engendré par le reste, c.a.d.

$$b_j = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu_{j_0}} a_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^{m} \frac{\mu_j}{\mu_{j_0}} b_j \quad .$$

Donc, $a_1, .., a_n, b_1, .., b_{j_0-1}, b_{j_0+1}, .., b_m$ sont encore générateurs de V.

$\square$

Remarque 02

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $b_1, .., b_m \in V$ générateurs de V. Alors pour tout $b \in V$ l'ensemble $\{b, b_1, .., b_m\}$ est linéairement dépendant.

Preuve : Ils existent $\lambda_1, .., \lambda_m \in \mathbb{K}$ tels que $b = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j b_j$. Donc

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j b_j + (-1) \cdot b = 0 \quad .$$

$\square$

Remarque 03

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $a_1, .., a_n \in V$ linéairement indépendant et $b_1, .., b_m \in V$ générateurs de V. Alors $n \leq m$.

Preuve : Par remarque 02 l'ensemble $\{a_1, b_1, .., b_m\}$ est un générateur de V linéairement dépendant. Par remarque 01 on peut supprimer un des $b_1, .., b_m$ et obtenir un générateur de V, du type $a_1, b_1, .., b_{m-1}$ (peut-être après réordonner les b_j). De même, on peut replacer un à un les b_j par les a_i et toujours avoir un générateur de V. Si $n > m$, alors $\{a_1, .., a_m\}$ est un générateur de V, donc par remarque 02, les $\{a_1, .., a_m, a_{m+1}\}$ sont linéairement indépendants. Ça c'est une contradiction !

$\square$

Conclusion

Si $a_1, .., a_n \in V$ et $b_1, .., b_m \in V$ sont bases de l'espace vectoriel V, c.a.d. ils engendrent V et sont systèmes linéairement indépendants, par remarque 03 il faut $n = m$.

$\square$

Exercice 05

Considérons le groupe affine orthogonal spécial

$$\mathrm{Aff}(n, \mathbb{K}) := \{F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, F(x) = Ax + c \mid A \in \mathrm{SO}(n, \mathbb{K}),\ c \in \mathbb{K}^n\}$$

par rapport à la composition. Noter que pour deux $F(\cdot) = A(\cdot) + c,\ F'(\cdot) = A'(\cdot) + c' \in G$ on a

$$(F \circ F')(\cdot) = \underbrace{(AA')}_{\in \mathrm{SO}(n)}(\cdot) + Ac' + c\ \in \mathrm{Aff}(n, \mathbb{K})$$

et $F^{-1}(\cdot) = A^{-1}(\cdot) - A^{-1}c \in \mathrm{Aff}(n, \mathbb{K})$, donc $\mathrm{Aff}(n, \mathbb{K})$ est vraiment un groupe. D'autre part, considérons le sous-group du $\mathrm{GL}(n + 1, \mathbb{K})$ définie par

$$\widetilde{\mathrm{Aff}}(n, \mathbb{K}) := \left\{ M = \begin{pmatrix} A & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle|\ A \in \mathrm{SO}(n, \mathbb{K}),\ c \in \mathbb{K} \right\} \quad .$$

Vraiment, $\widetilde{\mathrm{Aff}}(n,\mathbb{K})$ est un groupe car pour $M, M' \in \widetilde{\mathrm{Aff}}(n,\mathbb{K})$ on a

$$M \cdot M' = \begin{pmatrix} AA' & Ac' + c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \widetilde{\mathrm{Aff}}(n,\mathbb{K})$$

et

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \widetilde{\mathrm{Aff}}(n,\mathbb{K}) \quad .$$

Par les précédentes, c'est évident que la bijection

$$\mathrm{Aff}(n,\mathbb{K}) \to \widetilde{\mathrm{Aff}}(n,\mathbb{K}) \quad , \quad [A(\cdot) + c] \mapsto \begin{pmatrix} A & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme des groupes. Autrement dit, c'est une représentation de $\mathrm{Aff}(n,\mathbb{K})$. En plus, on a d'une part

$$\underbrace{(A(\cdot) + c)}_{\mathrm{Aff}(n,\mathbb{K})}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + c$$

pour quelqu'un $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ et d'autre part

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in \widetilde{\mathrm{Aff}}(n,\mathbb{K})} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{K}^{n+1}} = \begin{pmatrix} A\mathbf{x} + c \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le susdite signifie une correspondance entre les actions des groupes $\mathrm{Aff}(n,\mathbb{K})$ et $\widetilde{\mathrm{Aff}}(n,\mathbb{K})$. Noter que le sous-espace vectoriel

$$X := \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{K}^n \right\} \leq \mathbb{K}^{n+1}$$

est $\mathrm{Aff}(n,\mathbb{K})$-invariant.