Théorie des Groupes et Symétries en Physique

UJF Grenoble - Semestre d'Hiver 2010/2011

Feuille d' Exercices 02 - Solutions

Stilianos Louca

6 janvier 2011

Exercice 01

Parce que A, B sont groupes, $e \in A \cap B$, donc $g = ege$ et $g \sim g$. Si $g \sim g'$, qui est $g' = agb$ pour $a \in A,\ b \in B$, il faut $g = a^{-1}g'b^{-1}$, donc aussi $g' \sim g$. Si $g' = agb,\ g'' = a'g'b'$ pour $a, a' \in A,\ b, b' \in B$, il faut

$$g'' = \underbrace{a'a}_{\in A}\, g\, \underbrace{bb'}_{\in B}$$

et donc $g \sim g''$. Évidement le double co-ensemble AgB est la classe d'équivalence du g. Comme on sait, tous les co-ensembles constituent une partition de G.

Pour le cas $G = D_4 = \mathrm{gp}\{c, b\}$ avec $c^4 = b^2 = (bc)^2 = e$ et $A = B = C_2 = \mathrm{gp}\{b\}$ cette relation effectue la suivent partition :

$$G = \overbrace{\{e, b\}}^{AeB} \cup \overbrace{\{c, c^3, bc, bc^3\}}^{AcB} \cup \overbrace{\{c^2, bc^2\}}^{Ac^2B} \quad .$$

Exercice 02

Le groupe $D_4 = \mathrm{gp}\{c, b\}$ $(c^4 = b^2 = (cb)^2 = e)$ agit sur lui-même par rapport à la conjugaison. Ses classes de conjugaison sont les orbites Orb_{D_4} de cette action.

(a) En considérant les éléments du D_4 comme permutations S_4 des sommets d' un carré on a les identifications $c \mapsto (1234), b \mapsto (12)(34)$ et donc

$$D_4 \cong \{(), \overbrace{(1234)}^{c}, \overbrace{(13)(24)}^{c^2}, \overbrace{(1432)}^{c^3}, \overbrace{(12)(34)}^{b}, \overbrace{(24)}^{bc}, \overbrace{(14)(23)}^{bc^2}, \overbrace{(13)}^{bc^3}\} =: G \quad .$$

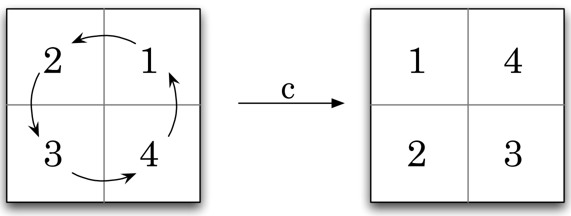

Figure 1: Sur l'identification de D_4 comme permutations. Exemple : L'identification de l' élément c comme permutation (1234).

Par vérification directe on trouve les classes de conjugation

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Orb}_{D_4}(()) = \{()\} \\
&\mathrm{Orb}_{D_4}((1234)) = \{(1234),(1432)\} \cong \left\{c, c^3\right\} \\
&\mathrm{Orb}_{D_4}((12)(34)) = \{(12)(34),(14)(23)\} \cong \left\{b, bc^2\right\} \\
&\mathrm{Orb}_{D_4}((13)(24)) = \{(13)(24)\} \cong \left\{c^2\right\} \\
&\mathrm{Orb}_{D_4}((24)) = \{(24),(13)\} \cong \left\{bc, bc^3\right\}
\end{aligned}
$$

(b) Par Exercice 01 de la Feuille 01, on a pour le groupe diédral

$$
\begin{aligned}
&(b^r c^k)c^l = b^r c^{k+l} \\
&(b^r c^k)(bc^l) = b^{r+1} c^{(n-1)k+l} \quad , \quad r, k, l \in \mathbb{N}_0
\end{aligned}
$$

Donc on a

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Orb}_{D_n}(e) = \{e\} \\
&\mathrm{Orb}_{D_n}(c) = \left\{c^k c c^{-k},\ bc^k c (bc^k)^{-1} : k \in \mathbb{N}_0\right\} = \{c, bcb\} = \left\{c, c^{(n-1)}\right\} \overset{n=4}{=} \left\{c, c^3\right\} \\
&\mathrm{Orb}_{D_n}(b) = \left\{c^k b c^{-k},\ bc^k b (bc^k)^{-1} : k \in \mathbb{N}_0\right\} = \left\{bc^{(n-2)k},\ bc^{(n-1)(n-2)k} : k \in \mathbb{N}_0\right\} \overset{n=4}{=} \left\{b, bc^2\right\} \\
&\mathrm{Orb}_{D_n}(c^2) = \left\{c^k c^2 c^{-k},\ bc^k c^2 (bc^k)^{-1} : k \in \mathbb{N}_0\right\} = \left\{c^2, bc^2 b\right\} = \left\{c^2, c^{(n-1)2}\right\} \overset{n=4}{=} \left\{c^2\right\} \\
&\mathrm{Orb}_{D_n}(bc) = \left\{c^k bc c^{-k},\ bc^k bc (bc^k)^{-1} : k \in \mathbb{N}_0\right\} = \left\{bc^{(n-2)k+1}, bc^{(n-1)[(n-2)k+1]} : k \in \mathbb{N}_0\right\} \overset{n=4}{=} \left\{bc, bc^3\right\}
\end{aligned}
$$

(c) Tous les transformations du D_4 peuvent être interprété comme rotations dans le $\mathbb{R}^3$ par :
- $0°, 90°, 180°, 270°$ autour l'axe perpendiculaire au plan choisi (éléments $\left\{e, c, c^2, c^3\right\}$),
- ou $180°$ autour une des deux axes principales ($\left\{b, bc^2\right\}$) ou une des deux axes diagonales ($\left\{bc, bc^3\right\}$) dans la plan choisi.

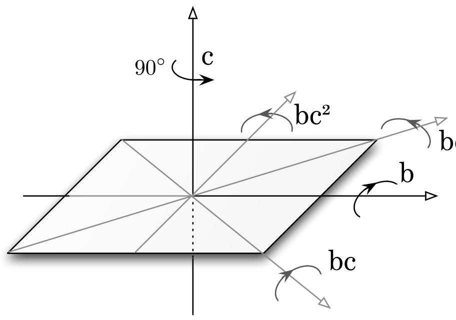

Figure 2: Sur l'identification de D_4 comme rotations dans R^3.

Revoyons remarque 01 ci-dessous : Pour $\rho, \rho', U \in \mathrm{SO}(3)$ il y a équivalence entre :

1. $\rho' = U\rho U^{-1}$, c'est-à-dire ρ et ρ' sont conjuguées via U.
2. U envoie l'axe de ρ sur l'axe de ρ', et les rotations ρ, ρ' sont (par rapport à ces axes) de la même angle orientée.

Donc, pour $\rho, \rho' \in G \leq \mathrm{SO}(3)$ il y a équivalence entre :

1. ρ et ρ' sont conjuguées dans le sous-groupe G.
2. ρ, ρ' sont rotations au tour des deux axes $\mathbf{a}, \mathbf{a}'$ respectivement, de même angle orientée (par rapport à ces axes [1]) et il existe un $U \in G$ qui envoie $\mathbf{a}$ à $\mathbf{a}'$.

Donc les classes de conjugaison de D_4 sont $\{e\}, \left\{c, c^3\right\}, \left\{c^2\right\}, \left\{b, bc^2\right\}$ et $\left\{bc, bc^3\right\}$, comme on savait déjà.

1. Noter que si $\rho \in \mathrm{SO}(3)$ est une rotation au tour de l'axe $\mathbf{a}$ de l'angle φ, elle est aussi rotation au tour de $-\mathbf{a}$ de l'angle $-\varphi$.

Exercice 03

Considérons l'application sgn : $S_n \to \{\pm 1\}$ qui envoie chaque permutation $\sigma \in S_n$ à ton signe $\operatorname{sgn}(\sigma)$. Elle est définie comme $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^s$, alors que s est le nombre de 2-cycles d'une représentation du σ. Donc pour permutations $\sigma, \rho \in S_n$ on a $\operatorname{sgn}(\sigma\rho) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\rho)$ et sgn est un homomorphisme du groupe S_n au groupe $\{\pm 1\}$ par rapport à la multiplication.

Parce que le groupe alternant A_n est défini comme le noyau ker(sgn) de ce homomorphisme, il est un sous-groupe normal du S_n (voyez la remarque ci-dessous). Par le premier théorème d'isomorphisme [2], le groupe quotient $S_n/A_n = S_n/\ker(\operatorname{sgn})$ est isomorphe du image $\operatorname{sgn}(S_n) = \{\pm 1\}$ et a donc la structure du groupe cycle C_2. En particulier, l'indice du A_n est égal à 2, donc A_n a l'ordre $|S_n|/2 = n!/2$.

Alternative : L' ensemble A_n consiste de tous les permutations qui peuvent être représentes comme produit d'un nombre pair de 2-cycles (*permutations pairs*). C'est évidement, que le produit de deux permutations paires est aussi une permutation paire. L'inverse d'un produit de cycles est un produit de leurs inverses, donc A_n est aussi fermé sous inversions. Evidement la identité () est une permutation paire, donc A_n est en effet un sous-group de S_n.

Chaque permutation $\sigma \in S_n$ est définie par les valeurs $\sigma(1), .., \sigma(n)$. Si les valeurs $\sigma(1), .., \sigma(n-2)$ sont fixés, les deux choix des values $\sigma(n-1), \sigma(n)$ décident du signe du σ, donc l'ordre $|A_n|$ du A_n est la moitié de $|S_n|$, c'est-à-dire $n!/2$. Donc l'indice du A_n dans S_n est 2 et selon la remarque ci-dessous, A_n est normale dans S_n et $S_n/A_n \cong C_2$. En particulier

$$S_n/A_n = \{A_n, (12)A_n\} \quad .$$

Exercice 04

Parce que $f : G \to G$ est évidement bijective (chaque élément a précisément un inverse), il suffit de montrer que f est un homomorphisme. Pour $x, y \in G$ on a

$$f(xy) = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} \overset{\substack{G \\ \text{abélien}}}{=} x^{-1}y^{-1} = f(x)f(y) \quad ,$$

donc f est vraiment un homomorphisme.

Exercice 05

Le groupe D_n est défini par $D_n = \operatorname{gp}\{c, b\}$, alors que $c^n = b^2 = 1$ et $cb = b^{-1}c^{-1}$. Donc $C_n := \operatorname{gp}\{c\}$ est un sous-groupe du D_n. Parce que les groupes D_n, C_n ont les ordres $2n$ et n, l'indice $|D_n : C_n|$ du C_n dans D_n est par définition 2. Par remarque 03 ci-dessous cela implique que C_n est normal et $D_n/C_n \cong C_2$.

Exercice 06

Pour $x, y \in G$ il faut que $f_a(xy) = axya^{-1} = axa^{-1}aya^{-1} = f_a(x)f_a(y)$, donc f_a est un homomorphisme. Évidemment $aGa^{-1} = G$ et $x = y$ si $axa^{-1} = aya^{-1}$, donc $f_a : G \to G$ est bijectif et vraiment un automorphisme.

L' application $f : G \to \operatorname{Aut}(G)$ qui envoie tout élément $a \in G$ au automorphisme f_a est loi-même un homomorphisme (rappelez que l'ensemble $\operatorname{Aut}(G)$ d'automorphismes du G est une groupe loi-même) entrez deux groupes, parce-que pour $a, b \in G$ et $x \in G$ on a

$$f_{ab}(x) = (ab)x(ab)^{-1} = abxb^{-1}a^{-1} = f_a(f_b(x)) \quad .$$

L'ensemble des automorphismes intérieurs $I(G)$ de G est simplement l'image $f(G)$ du homomorphisme f, donc loi même un groupe.

2. Si G, H sont deux groupes et $f : G \to H$ un homomorphisme, alors $f(G)$ est isomorphe du groupe quotient $G/\ker(f)$.

Un élément $a \in G$ est dans le centre $Z(G)$ si, et seulement si, pour tout $x \in G : xa = ax$, c'est-à-dire $x = axa^{-1} = f_a(x)$ et donc $f_a = e_{\mathrm{Aut}(G)}$. Par conséquence, le centre $Z(G)$ est le noyau $\ker(f)$ du homomorphisme $f : G \to \mathrm{Aut}(G)$.

Par le première théorème d'isomorphisme, l'image $I(G) = f(G)$ est isomorphe du groupe quotient $G/\ker(f) = G/Z(G)$. $\square$

Remarque 01 : Rotations conjuguées

a) Soient $R \in \mathrm{SO}(3)$ une rotation de l'angle φ autour de l'axe $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ et $U \in \mathrm{O}(3)$ une transformation orthogonale. Alors $R' := URU^{-1}$ est aussi une rotation de l' angle φ autour de la direction $\mathbf{a}' := U\mathbf{a}$.
Tout conjuguant $V \in \mathrm{O}(3)$ tel que $R' = VRV^{-1}$ est une réflexion sur un plan perpendiculaire au $\mathbf{a}' - \mathbf{a}$ ou une rotation.

b) Soient R et R' rotations autour les directions $\mathbf{a}$ et $\mathbf{a}'$ de la même angle φ, $U \in \mathrm{O}(3)$ une rotation et $V \in \mathrm{O}(3)$ une réflexion telles que $\mathbf{a}' = U\mathbf{a} = V\mathbf{a}$. Alors il faut que $R' = URU^{-1}$ ou $R' = VRV^{-1}$. Le cas exact dépend du sens de la rotation : Conjuguants rotations préservent le sens par rapport à l'axe, réflexions ne font pas.
En conséquence tous rotations $R, R' \in \mathrm{SO}(3)$ de la même angle, sont conjugues dans $\mathcal{O}(3)$.

Preuve :

1. Il faut que URU^{-1} est aussi une transformation orthogonale. Parce que $\det(URU^{-1}) = 1$ la transformation URU^{-1} est une rotation. Soient $P_{\mathbf{a}}$ et $P_{U\mathbf{a}} = UP_{\mathbf{a}}U^\dagger$ les projections orthogonales sur les axes $\mathbf{a}$ et $U\mathbf{a}$. Parce que $(URU^{-1})(U\mathbf{a}) = UR\mathbf{a} = U\mathbf{a}$, la axe de symétrie de URU^{-1} est la direction $U\mathbf{a}$. Pour chaque $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ on a
$$\begin{aligned}\left\langle \mathbf{x} - P_{U\mathbf{a}}\mathbf{x}, URU^{-1}(\mathbf{x} - P_{U\mathbf{a}}\mathbf{x})\right\rangle &= \left\langle U^\dagger\mathbf{x} - U^\dagger P_{U\mathbf{a}}\mathbf{x}, R\left(U^\dagger\mathbf{x} - U^\dagger P_{U\mathbf{a}}\mathbf{x}\right)\right\rangle \\ &= \left\langle U^\dagger\mathbf{x} - P_{\mathbf{a}}U^\dagger\mathbf{x}, R(U^\dagger\mathbf{x} - P_{\mathbf{a}}U^\dagger\mathbf{x})\right\rangle = \cos\varphi\end{aligned}$$
donc URU^{-1} est une rotation de l' angle φ autour de l'axe $U\mathbf{a}$.
Si $V \in \mathrm{O}(3)$ est une réflexion tel que $R' = VRV^{-1}$, c'est une réflexion sur un plan perpendiculaire au $\mathbf{a} - \mathbf{a}'$ parce que $\mathbf{a}' = V\mathbf{a}$.
2. Soie $R_U := URU^{-1}$ et $R_V := VRV^{-1}$. Selon le ci-dessus, R_U et R_V sont des rotations autour $\mathbf{a}'$ par la même angle comme R, mais dans les deux directions opposées. Choisi le correct des deux cas.

$\square$

Remarque 02 : Noyaux et sous-groupes normales

Si G, H sont groupes et $f : G \to H$ un homomorphisme, le noyau $\ker(f)$ est un sous-groupe normale du G.

Preuve : Le noyau $\ker(f)$ est l'image réciproque de la identité e_H par l'homomorphisme f, donc un sous groupe du G. Alors, il suffit de montrer que $\ker(f)$ satisfait $x^{-1}\ker(f)x = \ker(f)$ pour tout $x \in G$. Par symétrie pour ça, il suffit de montrer
$$x^{-1}\ker(f)x \subseteq \ker(f) \quad \forall\, x \in G \quad .$$
Mais ça c'est implique par
$$f\left(x^{-1}\ker(f)x\right) = \underbrace{f(x^{-1})}_{f(x)^{-1}}\underbrace{f(\ker(f))}_{\{e_H\}}f(x) = \left\{f(x)^{-1}e_H f(x)\right\} = \{e_H\} \quad .$$

$\square$

Remarque 03 : Sur sous-groupes du indice 2

Si G est un groupe est $H \subseteq G$ un sous-groupe du indice $|G : H| = 2$, alors H est un sous-groupe normal du G et $G/H \cong C_2$.

Preuve : Parce que $|G : H| = 2$, les seules co-ensembles à gauche du H sont $H = 1H$ et son complémentaire $G \setminus H$. Alors :
- Pour $x \in H$ on a $xH = H = Hx$.
- Pour $x \in G \setminus H$ on a $(xH) \cap H = \emptyset$, parce que si $xa \in H$ pour quelqu'un $a \in H$, il faut aussi que $x \in Ha^{-1} = H$, une contradiction. Donc pour $x \notin H$ il faut $xH = G \setminus H$ et ainsi $Hx = G \setminus H$, alors $xH = Hx$.

Ça montre que H est normal dans G. Parce que $|G/H| = |G : H| = 2$, il faut que G/H est isomorphe au groupe cyclique C_2.
□