EXERCICES 02

1. Supposons que A et B sont deux sous-groupes du groupe G. Montrer que la relation

$$g \sim g' \text{ , si } g' = agb \text{ pour } a \in A,\ b \in B \text{ quelconques,}$$

   est une relation d'équivalence, qui effectue une partition de G en *double co-ensembles* Ag_iB. Donner explicitement cette partition pour le cas $G = D_4 = \mathrm{gp}\{b, c\}$ avec $c^4 = b^2 = (bc)^2 = e$, $A = B = C_2 = \mathrm{gp}\{b\}$.

2. Trouver les classes de conjugaison de D_4 :
   (a) en considérant ses éléments comme permutations $\in S_4$ des sommets d'un carré ;
   (b) en employant les générateurs et leurs relations de définition ;
   (c) par considération géométrique.

3. Montrer que A_n est un sous-groupe normal de S_n. Construire l'espace des co-ensembles S_n/A_n et en déduire que A_n est de l'ordre $(\frac{1}{2}n!)$. Quelle est la structure du groupe S_n/A_n ?

4. Montrer que l'application $f :\ G \to G$, définie par $f(g) = g^{-1}$, est un automorphisme, si G est un groupe abélien.

5. Montrer que C_n est un sous-groupe normal de D_n et donc que $D_n/C_n \simeq C_2$.

6. Un *automorphisme intérieur* d'un groupe G est l'application f_a donnée par la conjugaison d'un élément fixe quelconque a de G : $g \to aga^{-1}$. Vérifier que l'ensemble des automorphismes intérieurs de G, noté $I(G)$, forme un groupe, et montrer que $I(G) \simeq G/Z$, où Z est le centre de G.