Théorie des Groupes et Symétries en Physique

UJF Grenoble - Semestre d'Hiver 2010/2011

Feuille d' Exercices 01 - Solutions

Stilianos Louca

18 septembre 2010

Exercice 01

La groupe diédral est défini comme $D_n := \mathrm{gp}\{c, b\}$ où c a l'ordre n, b l'ordre 2 et bc l'ordre 2. En particulier

$$D_n = \left\{c^0, c, .., c^{n-1}, bc^0, .., bc^{n-1}\right\} \quad .$$

On a :

$$\begin{aligned} & cb = b^{-1}bcbcc^{-1} = b^{-1}c^{-1} = bc^{n-1} \\ \Rightarrow\ & c^k b = c^{k-1}cb = c^{k-1}bc^{n-1} = .. = bc^{(n-1)k} \quad k \in \mathbb{N}_0 \\ \Rightarrow\ & (b^r c^k)(bc^l) = b^r(c^k b)c^l = b^r bc^{(n-1)k}c^l = b^{r+1}c^{(n-1)k+l} \quad r, k, l \in \mathbb{N}_0 \\ & (b^r c^k)c^l = b^r c^{k+l} \end{aligned}$$

La table de Cayley du groupe diédral D_3 est en particulier le suivent :

	e	c	c^2	b	bc	bc^2
e	e	c	c^2	b	bc	bc^2
c	c	c^2	e	bc^2	b	bc
c^2	c^2	e	c	bc	bc^2	b
b	b	bc	bc^2	e	c	c^2
bc	bc	bc^2	b	c^2	e	c
bc^2	bc^2	b	bc	c	c^2	e

Table 1: Table de Caley du D_3.

Exercice 02

On a les représentations :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 1 & 4 & 8 & 5 & 7 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 8 & 9 & 6 & 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 7 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Exercice 03

Si g est une permutation de l'ordre n avec la représentation $g = g_1 \circ \cdots \circ g_r$ et les $g_1, .., g_r$ disjoint cycles, il faut

$$e = g^n = g_1^n \circ \cdots \circ g_r^n \quad .$$

Mais $g_1^n, .., g_r^n$ sont disjoint cycles, donc $g_i^n = e$ et donc[1] $|g_i| \big| n \ \ \forall\ i = 1, .., r$. En autre, si $m \in \mathbb{N}$ est tel que $|g_i| \big| m \ \ \forall\ i = 1, .., r$ il faut évidement que $g_i^m = e$ et donc $g^m = e$.
En conséquence, l'ordre $|g| = n$ est le plus petit commun multiple des $|g_1|, .., |g_r|$. Donc, l'ordre des deux permutations ci-dessus (ex. 02) est 12 et 6. Ainsi, l'ordre de la permutation $(a_1..a_{2r})(b_1..b_r)$ est exactement $2r$.

Exercice 04

(a) Le groupe $\{1, i, -1, -i\}$ par rapport à la multiplication est isomorphe à groupe cyclique $C_4 = \{e, c, c^2, c^3\}$ par correspondance $i \mapsto c,\ -1 \mapsto c^2,\ -i \mapsto c^3$.

(b) Le groupe $\{2, 4, 6, 8\}$ par rapport à la multiplication modulo 10 est isomorphe à groupe cyclique C_4 par correspondance $6 \mapsto e,\ 2 \mapsto c,\ 4 \mapsto c^2,\ 8 \mapsto c^3$.

(c) Le sous-groupe $\{(), (12), (34), (12)(34)\} \subseteq S_4$ du groupe symétrique S_4 n'est pas cyclique, donc elle n'est pas isomorphe de les deux derniers groupes. En fait, on a $(12)^2 = (),\ (34)^2 = ()$ et $((12)(34))^2 = ()$, donc ce groupe est isomorphe au groupe diédral D_2.

(d) Le sous-groupe $\{(), (1234), (1432), (13)(24)\} \subseteq S_4$ du S_4 est isomorphe du groupe cyclique C_4 par correspondance $(1234) \mapsto c,\ (13)(24) \mapsto c^2,\ (1432) \mapsto c^3$.

(e) Le groupe

$$\left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \right\}$$

par rapport à la multiplication est isomorphe du groupe (c) par correspondance

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix} \mapsto (12)\ ,\ \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mapsto (34)\ ,\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mapsto (12)(34)$$

Le correspondance entre les groupes (a), (b) et (d) est évident.

Exercice 05

À cause de la définition du $Z(G)$, tous les éléments du centre $Z(G)$ commutent mutuellement. Si $g, h \in Z(G)$ sont dans le centre et $x \in G$, il faut que $ghx = gxh = xgh$, donc $gh \in G$. Ainsi

$$g^{-1}x = g^{-1}xgg^{-1} \overset{g \in Z(G)}{=} g^{-1}gxg^{-1} = xg^{-1}$$

donc $g^{-1} \in G$. Sûrement $e \in Z(G)$, donc $Z(G)$ est un sous-groupe abélien du G.

1. $|g_i|$ *est diviseur* du n.