

Theoretische Mechanik
FSU Jena - SS 2007
Blatt 13 - Lösungen
Lagrange II und Hamilton

Stilianos Louca

30. Juli 2007

Aufgabe 01

Bedingungen: Der Index i durchlaufe die Werte 1, 2, 3, die Indizes j, k die Werte 1, 2. Tauchen letztere gemeinsam auf so sind diese verschieden zu deuten.

Sei L_1 die Fadenlänge zwischen m_1 und m_2 , und L_0 die Länge des anderen Fadens. Der Ursprung $z = 0$ liege im Mittelpunkt der oberen Rolle, und $\vec{e}_z$ sei nach unten gerichtet. Es gelten folgende Nebenbedingungen:

$$x_i = \text{const}, \quad y_i = \text{const}, \quad z_1 + z_2 + 2z_3 = 2L_0 + L_1 =: L$$

Aufgrund der Nebenbedingungen gilt

$$\dot{z}_1 + \dot{z}_2 + 2\dot{z}_3 = 0, \quad \ddot{z}_1 + \ddot{z}_2 + 2\ddot{z}_3 = 0 \quad (1)$$

Auf jeden Massenpunkt m_i wirkt die Schwerkraft $F_{G_i} = mg\vec{e}_z$, mit dem Potential $U(z) = -mgz$. Seien z_{i_0} die Anfangspositionen der Massenpunkte und v_{i_0} deren Anfangsgeschwindigkeiten.

Lagrange II

Wir wählen als generalisierte Koordinaten die Positionen z_1 und z_2 . Die kinetische bzw. potentielle Energie T bzw. U der Massenpunkte ist gegeben durch

$$T = \sum_i \frac{m_i \dot{z}_i^2}{2} = \frac{m_1 \dot{z}_1^2 + m_2 \dot{z}_2^2}{2} + \frac{m_3 (\dot{z}_1 + \dot{z}_2)^2}{8}$$

$$U = -\sum_i m_i z_i g = -m_1 g z_1 - m_2 g z_2 + \frac{m_3 g (z_1 + z_2 - L)}{2} = g z_1 \cdot \left(\frac{m_3}{2} - m_1 \right) + g z_2 \cdot \left(\frac{m_3}{2} - m_2 \right) - \frac{m_3 g L}{2}$$

Die Lagrange Funktion bzw. Gleichungen ergeben sich als

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{m_1 \dot{z}_1^2 + m_2 \dot{z}_2^2}{2} + \frac{m_3 (\dot{z}_1 + \dot{z}_2)^2}{8} + g z_1 \cdot \left(m_1 - \frac{m_3}{2} \right) + g z_2 \cdot \left(m_2 - \frac{m_3}{2} \right) + \frac{m_3 g L}{2}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_j} = \frac{d}{dt} \left(m_j \dot{z}_j + \frac{m_3 (\dot{z}_1 + \dot{z}_2)}{4} \right) - g \left(m_j - \frac{m_3}{2} \right) = m_j \ddot{z}_j + \frac{m_3 (\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2)}{4} - g \left(m_j - \frac{m_3}{2} \right) = 0$$

Hamilton

Generalisierten Impulse

$$q_j := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}_j} = m_j \dot{z}_j + \frac{m_3(\dot{z}_1 + \dot{z}_2)}{4} \rightarrow \dot{z}_j = \frac{4m_k p_j + m_3(p_j - p_k)}{4m_1 m_2 + m_3(m_1 + m_2)}$$

$$\rightarrow \mathcal{L} = \frac{(p_1 - p_2)^2 \cdot m_3 \cdot (m_3 m_1 + m_3 m_2 + 8m_1 m_2) + 4m_1^2 p_2^2 (4m_2 + m_3) + 4m_2^2 p_1^2 (4m_1 + m_3) + 8m_1 m_2 m_3 p_1 p_2}{2(4m_1 m_2 + m_3(m_1 + m_2))^2} - U(z_1, z_2)$$

Die Hamilton Funktion bzw. kanonische Gleichungen sehen wie folgt aus

$$\mathcal{H} = \dot{z}_1 p_1 + \dot{z}_2 p_2 - \mathcal{L} = T + U$$

$$= \frac{4m_1^2 p_2^2 (4m_2 + m_3) + 4m_2^2 p_1^2 (4m_1 + m_3) + m_3^2 (p_1 - p_2)^2 (m_1 + m_2) + 8m_1 m_2 m_3 (p_1^2 + p_2^2 - p_1 p_2)}{2(4m_1 m_2 + m_3(m_1 + m_2))^2} + U(z_1, z_2)$$

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z_j} = -\frac{\partial U}{\partial z_j} = -g \left(m_j - \frac{m_3}{2} \right) \rightsquigarrow p_j = -gt \left(m_j - \frac{m_3}{2} \right) + C_j, \quad C_j \in \mathbb{R}$$

$$AWP \rightarrow p_j = -gt \left(m_j - \frac{m_3}{2} \right) + m_j v_{j_0} + \frac{m_3(v_{1_0} + v_{2_0})}{4}$$

$$\dot{z}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} = \frac{8m_k^2 p_j (4m_j + m_3) + 2m_3^2 (p_j - p_k)(m_1 + m_2) + 8m_1 m_2 m_3 (2p_j - p_k)}{2(4m_1 m_2 + m_3(m_1 + m_2))^2}$$

Lagrange I

Aufgrund der Nebenbedingung

$$f(z_1, z_2, z_3) = z_1 + z_2 + 2z_3 - L \equiv 0$$

machen wir den Ansatz

$$m_i \ddot{z}_i - F_{G_i} = m_i \ddot{z} - m_i g = \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial z_i} = \begin{cases} \lambda & : i = 1, 2 \\ 2\lambda & : i = 3 \end{cases}$$

Eingesetzt in Gl. 1 ergibt

$$\lambda = \frac{-4gm_1 m_2 m_3}{m_1 m_3 + m_2 m_3 + 4m_1 m_2}$$

$$\ddot{z}_j = \underbrace{\frac{4m_k g(m_j - m_3) + (m_1 + m_2)m_3 g}{m_3(m_1 + m_2) + 4m_1 m_2}}_{\alpha_j}$$

$$\ddot{z}_3 = \underbrace{\frac{m_3 g(m_1 + m_2) - 4gm_1 m_2}{m_3(m_1 + m_2) + 4m_1 m_2}}_{\alpha_3}$$

Aufintegriert ergibt

$$z_i = \frac{\alpha_i t^2}{2} + v_{i_0} t + z_{i_0}$$

Aufgabe 02

Bedingungen

Sei $x_e = x_e(t) = a \frac{t^2}{2}$ die Position der unteren Kante der schiefen Ebene im Zeitpunkt t . Sei $\vec{r}_0 := x_0 \vec{e}_x + y_0 \vec{e}_y + z_0 \vec{e}_z := \vec{r}(0)$ die Anfangsposition des Massenpunktes, und $\vec{v}_0 := v_{x_0} \vec{e}_x + v_{y_0} \vec{e}_y + v_{z_0} \vec{e}_z := \dot{\vec{r}}(0)$ seine Anfangsgeschwindigkeit. Auf den Massenpunkt wirkt die Erdanziehung $\vec{F}_G = -mg \vec{e}_z$. Die auf den MP gestellte Nebenbedingung lautet

$$f := z \cos \alpha - (x - x_e) \sin \alpha = z \cos \alpha - x \sin \alpha + \frac{at^2}{2} \sin \alpha \equiv 0$$

woraus folgt

$$\dot{z} \cos \alpha - \dot{x} \sin \alpha + at \sin \alpha = 0 \quad \wedge \quad \ddot{z} \cos \alpha - \ddot{x} \sin \alpha + a \sin \alpha = 0 \quad (2)$$

Lagrange II

Wir wählen als generalisierte Koordinaten den Abstand $s = \sqrt{(x - x_e)^2 + z^2}$ von der unteren Kante und die Koordinate y , also

$$x = x_e + s \cos \alpha, \quad z = s \sin \alpha \quad \rightarrow \quad \dot{x} = at + \dot{s} \cos \alpha \quad \wedge \quad \dot{z} = \dot{s} \sin \alpha$$

Die kinetische bzw. potentielle Energie des MP sind gegeben durch

$$T = \frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{2} = \frac{m(a^2 t^2 + \dot{s}^2 + \dot{y}^2 + 2at\dot{s} \cos \alpha)}{2}, \quad U = mgz = mgs \sin \alpha$$

und die Lagrange Funktion bzw. Gleichungen

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{m(a^2 t^2 + \dot{s}^2 + \dot{y}^2 + 2at\dot{s} \cos \alpha - 2gs \sin \alpha)}{2}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = \frac{d}{dt} (m(\dot{s} + at \cos \alpha)) + gm \sin \alpha = m\ddot{s} + ma \cos \alpha + gm \sin \alpha = 0$$

$$\rightarrow \ddot{s} = -g \sin \alpha - a \cos \alpha \quad \rightarrow \quad s = -(g \sin \alpha + a \cos \alpha) \cdot \frac{t^2}{2} + v_{s_0} t + s_0, \quad s_0 := \sqrt{x_0^2 + z_0^2}, \quad v_{s_0} := \frac{x_0 v_{x_0} + z_0 v_{z_0}}{s_0}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{d}{dt} (m\dot{y}) = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{y} = 0 \quad \rightarrow \quad y = v_{y_0} t + y_0$$

Hamilton

Wir definieren

$$p_s := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} = m(\dot{s} + at \cos \alpha) \quad \rightarrow \quad \dot{s} = \frac{p_s}{m} - at \cos \alpha$$

$$p_y := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \quad \rightarrow \quad \dot{y} = \frac{p_y}{m}$$

woraus sich die Hamilton Funktion bzw. kanonischen Gleichungen ergeben

$$\mathcal{H} = \dot{s}p_s + \dot{y}p_y - \mathcal{L} = \frac{p_y^2 + p_s^2}{2m} - \frac{ma^2t^2 \sin^2 \alpha}{2} - atp_s \cos \alpha + mgs \sin \alpha$$

$$\dot{s} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_s} = \frac{p_s}{m} - at \cos \alpha, \quad \dot{p}_s = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial s} = -mg \sin \alpha \rightarrow p_s = -mgt \sin \alpha + v_{s_0}m$$

$$\rightarrow \dot{s} = -gt \sin \alpha + v_{s_0} - at \cos \alpha \rightarrow s = -(g \sin \alpha + a \cos \alpha) \cdot \frac{t^2}{2} + v_{s_0}t + s_0$$

$$\dot{y} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m}, \quad \dot{p}_y = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = 0 \rightarrow \ddot{y} = 0$$

Lagrange I

Aufgrund der Nebenbedingung machen wir den Ansatz

$$m\ddot{\vec{r}} - \vec{F}_G = \lambda \vec{\nabla} \cdot f$$

und erhalten

$$m \cdot \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} + g \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ 0 \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$$

woraus wir sofort sehen können

$$y = v_{y_0}t + y_0$$

Durch einsetzen in die Nebenbedingung kommt man ferner auf

$$\lambda = m(g \cos \alpha - a \sin \alpha)$$

$$\ddot{x} = (a \sin \alpha - g \cos \alpha) \sin \alpha \rightarrow x = (a \sin^2 \alpha - g \cos \alpha \sin \alpha) \cdot \frac{t^2}{2} + v_{x_0}t + x_0$$

$$\ddot{z} = -g \sin^2 \alpha - a \sin \alpha \cos \alpha \rightarrow z = -(g \sin^2 \alpha + a \sin \alpha \cos \alpha) \cdot \frac{t^2}{2} + v_{z_0}t + z_0$$

Die Zwangskraft $\vec{F}^*$ ergibt sich aus

$$\vec{F}^* = m\ddot{\vec{r}} - \vec{F}_G = m(a \sin^2 \alpha - g \cos \alpha \sin \alpha) \cdot \vec{e}_x + m(g \cos^2 \alpha - a \sin \alpha \cos \alpha) \cdot \vec{e}_z$$

Aufgabe 03

Bedingungen: Auf den Massenpunkt wirkt die Gravitation $\vec{F}_G = -mg\vec{e}_y$ und es gilt folgende Bedingung:

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y = a(\vartheta - \sin \vartheta) \cdot \vec{e}_x + a(1 + \cos \vartheta) \cdot \vec{e}_y, \quad \vartheta \in [0, 2\pi]$$

also

$$\dot{\vec{r}} = a(\dot{\vartheta} - \dot{\vartheta} \cos \vartheta) \cdot \vec{e}_x - a\dot{\vartheta} \sin \vartheta \cdot \vec{e}_y$$

Sei ferner $\vartheta_0 := \vartheta(t=0)$ und $v_{\vartheta_0} := \dot{\vartheta}(t=0)$.

Lagrange I

Wir wählen als einzige generalisierte Koordinate den Parameter ϑ . Die kinetische und potentielle Energie sind gegeben durch

$$T = \frac{m(\dot{\vec{r}})^2}{2} = ma^2\dot{\vartheta}^2(1 - \cos \vartheta)$$
$$U = mgy = mga(1 + \cos \vartheta)$$

Die Lagrange Funktion bzw. Gleichungen ergeben sich als

$$\mathcal{L} = T - U = ma^2\dot{\vartheta}^2(1 - \cos \vartheta) - mga(1 + \cos \vartheta)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} = \frac{d}{dt} \left(2ma^2\dot{\vartheta}(1 - \cos \vartheta) \right) - ma(a\dot{\vartheta}^2 + g) \sin \vartheta = ma \left(a\dot{\vartheta}^2 \sin \vartheta + 2a\ddot{\vartheta}(1 - \cos \vartheta) - g \sin \vartheta \right) = 0$$

$$\rightarrow \ddot{\vartheta} = \frac{g \sin \vartheta - a\dot{\vartheta}^2 \sin \vartheta}{2a(1 - \cos \vartheta)}$$

Hamilton

Wir definieren

$$p_{\vartheta} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vartheta}} = 2ma^2\dot{\vartheta}(1 - \cos \vartheta) \rightarrow \dot{\vartheta} = \frac{p_{\vartheta}}{2ma^2(1 - \cos \vartheta)}$$

und schreiben

$$T = \frac{p_{\vartheta}^2}{4ma^2(1 - \cos \vartheta)}$$

Da es sich um skleronome Bedingungen handelt, ergeben sich die Hamilton Funktion bzw. kanonischen Gleichungen wie folgt

$$\mathcal{H} = T + U = \frac{p_{\vartheta}^2}{4ma^2(1 - \cos \vartheta)} + mga(1 + \cos \vartheta)$$

$$\dot{p}_{\vartheta} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vartheta} = -\frac{p_{\vartheta}^2 \sin \vartheta}{4ma^2(1 - \cos \vartheta)^2} - mga \sin \vartheta$$

$$\dot{\vartheta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{\vartheta}} = \frac{p_{\vartheta}}{2ma^2(1 - \cos \vartheta)}$$

Lösung des Problems

Da es sich um skleronome Bedingungen handelt gilt Energieerhaltung. Sei E die gesamte Energie des Systems, so gilt

$$E = T + U = ma^2\dot{\vartheta}^2(1 - \cos \vartheta) + mga(1 + \cos \vartheta) = \text{const} \rightarrow \dot{\vartheta} = \sqrt{\frac{E - mga(1 + \cos \vartheta)}{ma^2(1 - \cos \vartheta)}}$$

$$\rightarrow \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \sqrt{\frac{ma^2(1 - \cos \vartheta)}{E - mga(1 + \cos \vartheta)}} d\vartheta = \int_0^t dt = t$$

Bemerkung: $E = ma^2v_{\vartheta_0}^2(1 - \cos \vartheta_0) + mga(1 + \cos \vartheta_0)$