

Übungen zur Theoretischen Mechanik – SS 2007

Blatt 13

Thema: Lagrange II und Hamilton

Aufg. 1

Gegeben sei eine Poggendorf-Waage (Abb. 1).

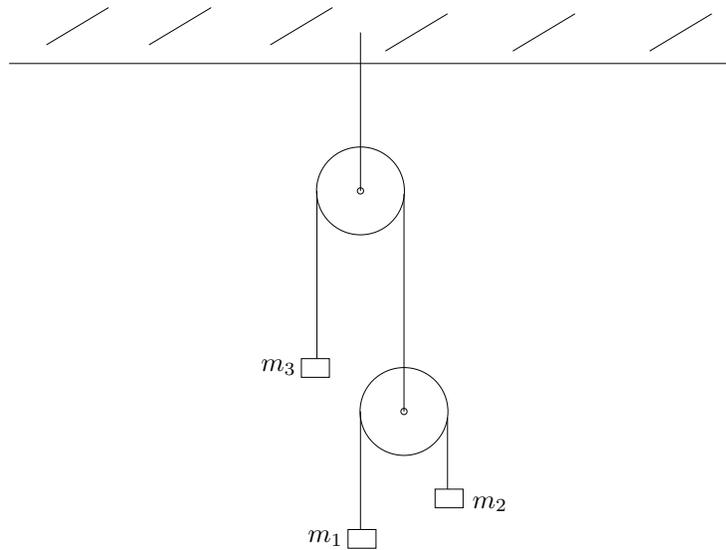


Abbildung 1: Poggendorf-Waage

Es ist eine Rolle gegeben mit einem Faden, an dem auf der einen Seite ein Massenpunkt m_3 hängt, an der anderen eine Rolle mit einem Faden, an dessen Enden die Massenpunkte m_1 und m_2 hängen. Die Rollen können sich um eine Achse senkrecht zur Papierebene drehen. Die Bewegung aller drei Massenpunkte erfolgt allein in (positiver oder negativer) z -Richtung. Auf alle drei Massenpunkte wirkt die Schwerkraft, Reibungskräfte werden vernachlässigt, die Fäden haben konstante Länge. -

- Stellen Sie die Lagrange- und die Hamiltonfunktion für dieses Problem auf! Ermitteln Sie die Lagrange-Gleichungen 2. Art, sowie die Hamiltonschen kanonischen Gleichungen!
- Behandeln Sie das Problem mit Lagrange I!

Aufg. 2

Eine schiefe Ebene werde in x -Richtung mit konstanter Beschleunigung bewegt (Abb. 2).

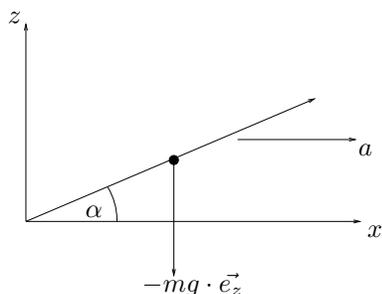


Abbildung 2: Massenpunkt auf beschleunigter schiefer Ebene

Auf den Massenpunkt wirkt die Schwerkraft, Reibungseffekte werden vernachlässigt.

- Ermitteln Sie die Lagrangefunktion, die Hamiltonfunktion, die Lagrange-Gleichungen 2. Art und die Hamiltonschen kanonischen Gleichungen! Lösen Sie das Bewegungsproblem!
- Behandeln Sie die Aufgabe mit Lagrange I! Ermitteln Sie die Zwangskraft!

Aufg. 3

Ein Massenpunkt gleitet reibungsfrei im Schwerfeld der Erde auf einer Zykloide, die gegeben ist durch:

$$\begin{aligned}x &= a(\vartheta - \sin \vartheta) \\y &= a(1 + \cos \vartheta)\end{aligned}$$

mit $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ (Abb. 3).

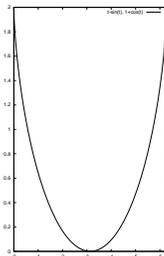


Abbildung 3: Zykloide (mit $a = 1$)

Bestimmen Sie die Lagrangefunktion, die Hamiltonfunktion, die Lagrange-Gleichungen 2. Art, die Hamiltonschen kanonischen Gleichungen und lösen Sie das Bewegungsproblem!