Theoretische Mechanik
FSU Jena - SS 2007
Blatt 12 - Lösungen
Lagrange II und Hamilton

Stilianos Louca

10. Juli 2007

Aufgabe 01

Anfangsbedingungen: Sei o.B.d.A $\varphi = \omega_0 t,\ v_\rho^0 := \dot{\rho}(0)$ und $\rho_0 := \rho(0) \ \rightarrow\ z_0 := z(0) = a\rho_0^2$. Die einzige eingeprägte Kraft ist die Erdanziehung $\vec{F}_G = -mg\vec{e}_z$. Aufgrund der Nebenbedingungen

$$z = a\rho^2 \ \wedge\ \varphi = \omega_0 t$$

gilt

$$\dot{z} = 2a\rho\dot{\rho} \ \wedge\ \dot{\varphi} = \omega_0$$

Lagrange

Wir wählen als generalisierte Koordinate den Radius $\rho \in (-\infty, \infty)$. Die kinetische und potentielle Energie T und U sind jeweils gegeben durch

$$T = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} = \frac{m}{2} \cdot (\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2} \cdot (\dot{\rho}^2 + \rho^2\omega_0^2 + 4a^2\rho^2\dot{\rho}^2)$$

$$U = mgz = amg\rho^2$$

Da keine anderen eingeprägten Kräfte wirken ergibt sich die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}$ als

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{m}{2} \cdot (\dot{\rho}^2 + \rho^2\omega_0^2 + 4a^2\rho^2\dot{\rho}^2 - 2ag\rho^2)$$

Die Lagrange- bzw. Bewegungs-Gleichung lautet dementsprechend

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\rho}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\rho} = m \cdot \frac{d}{dt}(\dot{\rho} + 4a^2\rho^2\dot{\rho}) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\rho}$$

$$= m(\ddot{\rho} + 4a^2\ddot{\rho}\rho^2 + 8a^2\rho\dot{\rho}^2) - m(\rho\omega_0^2 + 4a^2\rho\dot{\rho}^2 - 2ag\rho) = 0$$

$$\rightarrow\ \ddot{\rho} = \frac{\rho(\omega_0^2 - 4a^2\dot{\rho}^2 - 2ag)}{1 + 4a^2\rho^2}$$

Hamilton

Der generalisierte Impuls p_ρ ist gegeben durch

$$p_\rho = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\rho}} = m \cdot (\dot{\rho} + 4a^2\rho^2\dot{\rho})$$

weshalb man durch Umformen auf

$$\dot{\rho} = \frac{p_\rho}{m(1+4a^2\rho^2)}$$

kommt. Ferner

$$\mathcal{L} = \frac{p_\rho^2}{2m(1+4a^2\rho^2)} + \frac{m\rho^2(\omega_0^2 - 2ag)}{2}$$

Die Hamilton-Funktion $\mathcal{H}$ bzw. die Hamilton'schen Kanonischen Gleichungen sind gegeben durch

$$\mathcal{H} = \dot{\rho}\cdot p_\rho - \mathcal{L} = \frac{p_\rho^2}{2m(1+4a^2\rho^2)} - \frac{m\rho^2(\omega_0^2 - 2ag)}{2}$$

$$\dot{p_\rho} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\rho} = \frac{4a^2p_\rho^2\rho}{m(1+4a^2\rho^2)^2} + m\rho(\omega_0^2 - 2ag)$$

$$\dot{\rho} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_\rho} = \frac{p_\rho}{m(1+4a^2\rho^2)}$$

Spezialfall : $\omega_0^2 = 2ga$

Man erhält die DGL'n

$$\dot{p_\rho} = \frac{4a^2p_\rho^2\rho}{m(1+4a^2\rho^2)^2}$$

$$\dot{\rho} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_\rho} = \frac{p_\rho}{m(1+4a^2\rho^2)}$$

bzw.

$$\ddot{\rho} = -\frac{4a^2\rho\dot{\rho}^2}{1+4a^2\rho^2}$$

Lösen der Bewegungsgleichung

Durch die Substitution $p(\rho) = \dot{\rho}$ kommt man auf

$$\ddot{\rho} = \dot{p} = \frac{dp}{d\rho}\cdot\dot{\rho} = \frac{dp}{d\rho}\cdot p = -\frac{4a^2\rho p^2}{1+4a^2\rho^2} \;\rightarrow\; \ln\left|\frac{p}{p_0}\right| = \int_{p_0}^{p}\frac{du}{u} = -\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{4a^2u}{1+4a^2u^2}\,du = -\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{1+4a^2\rho^2}{1+4a^2\rho_0^2}\right)$$

$$\rightarrow\; \dot{\rho} = \frac{R}{\sqrt{1+4a^2\rho^2}},\; R := v_\rho^0\cdot\sqrt{1+4a^2\rho_0^2} = const \;\rightarrow\; \int_{\rho_0}^{\rho}\sqrt{1+4a^2u^2}\,du = R\int_0^t dt = Rt$$

Durch die Bronstein-Methode kommt man auf

$$Rt = \left[\frac{u}{2}\cdot\sqrt{1+4a^2u^2} + \frac{1}{4a}\cdot\ln\left(2au + \sqrt{1+4a^2u^2}\right)\right]_{\rho_0}^{\rho}$$

$$\rightarrow\; \sqrt{1+4a^2\rho_0^2}\cdot\left(t\cdot v_\rho^0 + \frac{\rho_0}{2}\right) + \frac{1}{4a}\cdot\ln\left(2a\rho_0 + \sqrt{1+4a^2\rho_0^2}\right) = \frac{\rho}{2}\cdot\sqrt{1+4a^2\rho^2} + \frac{1}{4a}\cdot\ln\left(2a\rho + \sqrt{1+4a^2\rho^2}\right)$$

Aufgabe 02

Bedingungen: Die einzige eingeprägte Kraft ist die Erdanziehung $\vec{F}_G = -mg\vec{e}_z$. Aus den Nebenbedingungen

$$z\cos\alpha - x\sin\alpha = 0 \;\wedge\; y = 0$$

ergibt sich

$$\dot{z}\cos\alpha - z\dot{\alpha}\sin\alpha - \dot{x}\sin\alpha - x\dot{\alpha}\cos\alpha = 0$$

Lagrange

Wir wählen als generalisierte Koordinate den Abstand ρ vom Ursprung:

$$x = \rho \cos \alpha, \; z = \rho \sin \alpha$$

$$\dot{x} = \dot{\rho} \cos \alpha - \rho \dot{\alpha} \sin \alpha, \; \dot{z} = \dot{\rho} \sin \alpha + \rho \dot{\alpha} \cos \alpha$$

Die kinetische und potentielle Energien T und U sind gegeben durch

$$T = \frac{m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2)}{2} = \frac{m(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\alpha}^2)}{2}$$

$$U = mgz = mg\rho \sin \alpha$$

weshalb für die Lagrange Funktion bzw. Gleichungen folgt

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{m}{2} \cdot (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\alpha}^2 - 2g\rho \sin \alpha)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} = \frac{d}{dt}(m\dot{\rho}) - m(\rho \dot{\alpha}^2 - g \sin \alpha)$$

$$\rightarrow \; \ddot{\rho} = \rho \dot{\alpha}^2 - g \sin \alpha$$

Hamilton

Der generalisierte Impuls p_ρ ist gegeben durch

$$p_\rho = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho} \; \rightarrow \; \dot{\rho} = \frac{p_\rho}{m}$$

und entsprechend eingesetzt in die Lagrange Funktion

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{p_\rho^2}{m^2} + \rho^2 \dot{\alpha}^2 - 2g\rho \sin \alpha \right)$$

und die Hamilton Funktion $\mathcal{H}$ bzw. Gleichungen

$$\mathcal{H} = \dot{\rho} \cdot p_\rho - \mathcal{L} = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{m}{2}(2g\rho \sin \alpha - \rho^2 \dot{\alpha}^2)$$

$$\dot{p}_\rho = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \rho} = m(\rho \dot{\alpha}^2 - g \sin \alpha) \; \wedge \; \dot{\rho} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\rho} = \frac{p_\rho}{m}$$

Spezialfall

Für $\alpha = \omega_0 t, \; \omega_0 > 0$ ergibt sich die lineare DGL

$$\ddot{\rho} = \rho \omega_0^2 - g \sin \omega_0 t$$

Mit dem Ansatz $\rho = Ae^{\lambda t}$ kommt man für den homogenen Teil auf

$$\rho_h = Ae^{\omega_0 t} + Be^{-\omega_0 t}, \; A, B \in \mathbb{R}$$

und über den Ansatz $\rho_p = b \sin \omega_0 t$ für den inhomogenen Teil auf

$$\rho_p = \frac{g}{2\omega_0^2} \cdot \sin \omega_0 t$$

weshalb sich die allgemeine Lösung ergibt als

$$\boxed{\rho = Ae^{\omega_0 t} + Be^{-\omega_0 t} + \frac{g}{2\omega_0^2} \cdot \sin \omega_0 t}$$

Für die speziellen Anfangsbedingungen $\rho(0) = \dot{\rho}(0) = 0$ ergibt sich dann beispielsweise

$$\rho = \frac{g}{4\omega_0^2} \cdot \left(-e^{\omega_0 t} + e^{-\omega_0 t}\right) + \frac{g}{2\omega_0^2} \cdot \sin \omega_0 t = -\frac{g \sinh \omega_0 t}{2\omega_0^2} + \frac{g}{2\omega_0^2} \cdot \sin \omega_0 t$$

Forderung: $\lim\limits_{t\to\infty} \rho < \infty$

Wir fordern dass der Massenpunkt im Endlichen bleiben soll, also

$$\lim_{t\to\infty} \rho = \lim Ae^{\omega_0 t} + \underbrace{\lim Be^{-\omega_0 t}}_{0} + \underbrace{\lim \frac{g}{2\omega_0^2} \cdot \sin \omega_0 t}_{<\infty} \overset{!}{<} \infty \;\to\; A = 0$$

$$\to\; B = \rho(0) =: \rho_0 \;\to\; v_\rho^0 := \dot{\rho}(0) = -\rho_0 \omega_0 + \frac{g}{2\omega_0}$$

Für den Spezialfall $g = 0$ (also keine eingeprägte Kraft) ergibt sich die allgemeine Bewegungsgleichung

$$\boxed{\rho = Ae^{\omega_0 t} + Be^{-\omega_0 t}}$$

und unter der Forderung dass ρ im Endlichen bleiben soll

$$A = 0,\; B = \rho_0,\; v_\rho^0 = -\rho_0 \omega_0 \;\to\; \rho = \rho_0 \cdot e^{-\omega_0 t}$$

woraus man sieht dass $\lim\limits_{t\to\infty} \rho = 0$, der Massenpunkt sich also langsam der Rotationsachse annähert!

Aufgabe 03

Bedingungen: Sei in Kugelkoordinaten $(\rho, \vartheta, \varphi)$ die Kegelfläche und somit die Nebenbedingung gegeben durch $\vartheta = const$. Sei o.B.d.A $\varphi_0 := \varphi(0) = 0$. Die einzige eingeprägte Kraft ist die Erdanziehung $\vec{F}_G = -mg\vec{e}_z = mg \sin \vartheta \cdot \vec{e}_\vartheta + mg \cos \vartheta \cdot \vec{e}_\rho$.

Lagrange

Wir wählen als generalisierte Koordinaten den Abstand ρ vom Ursprung und den Winkel φ. Die kinetische und potentielle Energie T, U sind gegeben durch

$$T = \frac{m}{2} \cdot \left(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\vartheta}^2 + \rho^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2\right) = \frac{m}{2} \cdot \left(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2\right)$$

$$U = mgz = mg\rho \cos \vartheta$$

Die Lagrange Funktion und Gleichungen lauten demzufolge

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{m}{2} \cdot \left(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 - 2g\rho \cos \vartheta\right)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\rho}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} = \frac{d}{dt}(m\dot{\rho}) - m(\rho \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 - g \cos \vartheta) = 0 \;\to\; \ddot{\rho} = \rho \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2 - g \cos \vartheta$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt}(m\rho^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}) = 0 \;\to\; m\rho^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} =: L_z = const$$

Die Koordinate φ ist Zyklisch, woraus sich die Drehimpulserhaltung bzgl. der z-Achse ergibt.

Hamilton

Die generalisierten Impulse p_φ und p_ρ ergeben sich als

$$p_\rho = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\rho} = m\dot\rho \;\rightarrow\; \dot\rho = \frac{p_\rho}{m}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\varphi} = m\rho^2 \sin^2\vartheta \dot\varphi = L_z \;\rightarrow\; \dot\varphi = \frac{L_z}{m\rho^2 \sin^2\vartheta}$$

Daraus ergibt sich die Hamilton Funktion

$$\mathcal{H} = T + U = \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{p_\rho^2}{m^2} + \frac{L_z^2}{m^2\rho^2\sin^2\vartheta} + 2g\rho\cos\vartheta \right)$$

und die Hamilton'schen kanonischen Gleichungen

$$\dot p_\rho = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \rho} = \frac{L_z^2}{m\rho^3 \sin^2\vartheta} - mg\cos\vartheta,\; \dot\rho = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\rho} = \frac{p_\rho}{m}$$

$$\dot p_\varphi = 0,\; \dot\varphi = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\varphi} = \frac{L_z}{m\rho^2\sin^2\vartheta}$$

Lösung des Bewegungsproblems

Da $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$ gilt Energieerhaltung weshalb wir schreiben können

$$E = T + U = \frac{m}{2} \cdot \left(\dot\rho^2 + \frac{L_z^2}{m^2\rho^2\sin^2\vartheta} + 2g\rho\cos\vartheta \right) = const \;\rightarrow\; \dot\rho^2 = \frac{2\cdot(E - u(\rho))}{m},\; u(\rho) := \frac{L_z^2}{2m\rho^2\sin^2\vartheta} + mg\rho\cos\vartheta$$

$$\rightarrow \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{dr}{\sqrt{2(E-u(r))/m}} = \int_0^t du = t,\; \rightsquigarrow\; \rho = \rho(t) \;\rightarrow\; \frac{d\varphi}{dt} = \frac{L_z}{m\rho^2(t)\sin^2\vartheta} =: \Phi(t) \;\rightarrow\; \varphi = \int_0^{\varphi} du = \int_0^t \Phi(u)du$$