Theoretische Mechanik
FSU Jena - SS 2007
Blatt 11 - Lösungen
Lagrange I und Lagrange II

Stilianos Louca

10. Juli 2007

Aufgabe 01

Anfagsbedingungen

Seien $z_{1_0} := z_1(t=0), z_{2_0} := z_2(t=0)$ die Anfangspositionen und $v_{1_0} := \dot{z}_1(t=0), v_{2_0} := \dot{z}_2(t=0)$ die Anfangsgeschwindigkeiten der beiden Massen. Auf beide Massen wirkt die Schwerkraft $\vec{F}_{G_i} = m_i\vec{g} = -m_i g \cdot \vec{e}_z$.
Bemerkung: Tauchen in folgenden Berechnungen zwei Indexes i, j in der selben Gleichung auf, so nehmen diese jeweils die Werte $i=1, j=2$ und $i=2, j=1$ an. Taucht nur einer auf so nimmt dieser die Werte 1 und 2 an.

Ohne Dehnung

Sei $Q := \pi R_0 - L + L_0 = const$. Die einzige Nebenbedingung ist dann $\mathcal{F}(z_1, z_2) := Q - z_1 - z_2 = 0$.

D'Alembert

Die virtuellen Verrückungen $\delta_{\vec{r}_i}$ sind gegeben durch

$$\delta_{\vec{r}_i} = \delta_{z_i} \cdot \vec{e}_z,\ \delta_{z_1} + \delta_{z_2} = 0$$

Aufgrund des d'Alembert'schen Prinzips muss gelten

$$\sum_{i=1}^{2}(m_i\ddot{\vec{r}}_i - m_i\vec{g}) \cdot \delta_{\vec{r}_i} = \sum_{i=1}^{2}(m_i\ddot{z}_i + m_i g)\delta_{z_i} = 0$$

$$\Rightarrow\ [(m_1\ddot{z}_1 - m_2\ddot{z}_2 + (m_1 - m_2)g] \cdot \delta_{z_1} = 0\ \Rightarrow\ \ddot{z}_1(m_1+m_2) + (m_1 - m_2)g = 0$$

$$\Rightarrow\ \ddot{z}_1 = -\ddot{z}_2 = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2}$$

da $\ddot{z}_1 = -\ddot{z}_2$. Die Bahngleichungen ergeben sich demzufolge als (zweimal Integrieren)

$$\boxed{z_i = \frac{(m_j - m_i)g}{2(m_1+m_2)} \cdot t^2 + v_{i_0}t + z_{i_0}}$$

solange der Faden lang genug ist.
Bemerkung: Es gilt $z_{2_0} = Q - z_{1_0}$ und $v_{2_0} = -v_{1_0}$.

Lagrange I

Die Lagrange Gleichungen lauten

$$m_i \ddot{z}_i = F_{G_i} + \lambda \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_i} = -m_i g - \lambda \tag{1}$$

wobei λ der zu suchende *Lagrange Multiplikator* ist. Eingesetzt in

$$\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2 = 0$$

ergibt

$$\frac{m_1 g + \lambda}{m_1} = \frac{-m_2 g - \lambda}{m_2} \;\Rightarrow\; \lambda = -\frac{2 m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$$

bzw. die Bewegungsgleichungen

$$\boxed{\ddot{z}_i = \frac{(m_j - m_i) g}{m_1 + m_2}}$$

Lagrange II

Die kinetische Energie T der beiden Massen ist

$$T = \frac{m_1 \dot{z}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{z}_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)\dot{z}_1^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)\dot{z}_2^2}{2}$$

da $\dot{z}_1 + \dot{z}_2 = 0$. Die potentielle Energie U (Nullpunkt im Koordinatenursprung) ist

$$U = m_1 g z_1 + m_2 g z_2$$

Wir wählen als einzige freie (generalisierte) Variable $z := z_1$, und substituieren $z_2 = Q - z$. Die Lagrange Funktion $\mathcal{L}$ ergibt sich dementsprechend als

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{(m_1 + m_2)\dot{z}^2}{2} - g(m_1 - m_2) z + m_2 Q g$$

woraus wir die Gleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = (m_1 + m_2)\ddot{z} + g(m_1 - m_2) = 0 \;\Rightarrow\; \ddot{z} = \ddot{z}_1 = -\ddot{z}_2 = \frac{(m_2 - m_1) g}{m_1 + m_2}$$

bekommen. Zweimal Integrieren führt zu den oben angegebenen Bahngleichungen.

Zwangskräfte

Die Zwangskraft $\vec{F}_i$ ist gegeben durch

$$\vec{F}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i + m_i g = \frac{2 m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} \cdot \vec{e}_z$$

Auf beide Massen wirkt also die gleiche Zwangskraft. Dies bringt zum Ausdruck dass die Fadenspannung auf beiden Seiten gleich ist!

Anfangswertproblem

Das Anfangswertproblem $v_{1_0} = 0$ führt zu

$$z_1 = \frac{(m_2 - m_1) g}{2(m_1 + m_2)} \cdot t^2 + z_{1_0},\;\; z_2 = \frac{(m_1 - m_2) g}{2(m_1 + m_2)} \cdot t^2 + Q - z_{1_0}$$

In diesem Fall ruhen die Massen nur für $t = 0$ oder $m_1 = m_2$.

Mit Dehnung

Sei nun $Q := \pi R_0 + L_0 - B_0$ also $\mathcal{F}(z_1, z_0) = Q - z_1 - z_2 - C_0 \cos\omega_0 t = 0$. Dann gilt

$$\dot{z}_1 + \dot{z}_2 = C_0 \sin\omega_0 t \ \wedge \ \ddot{z}_1 + \ddot{z}_2 = \omega_0^2 C_0 \cos\omega_0 t \tag{2}$$

D'Alembert

Aufgrund des d'Alembert'schen Prinzips muss gelten

$$\sum_{i=1}^{2} (m_i \ddot{\vec{r}}_i - m_i \vec{g}) \cdot \delta_{\vec{r}_i} = \sum_{i=1}^{2} (m_i \ddot{z}_i + m_i g) \delta_{z_i} = 0$$

$$\Rightarrow \ (m_i \ddot{z}_i + g(m_i - m_j) - m_j(\omega_0^2 C_0 \cos\omega_0 t - \ddot{z}_i) - m_j g)\delta_{z_i} = 0$$

$$\Rightarrow \ \ddot{z}_i(m_1 + m_2) + g(m_i - m_j) - m_j \omega_0^2 C_0 \cos\omega_0 t = 0$$

woraus die Bewegungsgleichungen folgen

$$\boxed{\ddot{z}_i = \frac{g(m_j - m_i) + m_j \omega_0^2 C_0 \cos\omega_0 t}{m_1 + m_2}}$$

Zweimal Integrieren und Lösen des allgemeinen AWP ergibt die Bahngleichungen

$$\boxed{z_i = \frac{g(m_j - m_i)}{2(m_1 + m_2)} \cdot t^2 + \frac{m_j C_0}{m_1 + m_2} \cdot (1 - \cos\omega_0 t) + v_{i_0} t + z_{i_0}}$$

Bemerkung: Es gilt $z_{2_0} = Q - z_{1_0} - C_0$ und $v_{2_0} = -v_{1_0}$

Lagrange I

Die Lagrange Gleichungen ergeben sich als

$$m_i \ddot{z}_i = F_{G_i} + \lambda \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_i} = -m_i g - \lambda \tag{3}$$

Einsetzen in Gl. 2 ergibt

$$\frac{-m_1 g - \lambda}{m_1} + \frac{-m_2 g - \lambda}{m_2} = \omega_0^2 C_0 \cos\omega_0 t \ \Rightarrow \ \lambda = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \ (\omega_0^2 C_0 \cos\omega_0 t + 2g)$$

und dementsprechend (einsetzen in Gl. 3) die Bewegungsgleichungen

$$\boxed{\ddot{z}_i = \frac{g(m_j - m_i) + m_j \omega_0^2 C_0 \cos\omega_0 t}{m_1 + m_2}}$$

Lagrange II

Die kinetische Energie ist gegeben durch

$$T = \frac{m_1 \dot{z}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{z}_2^2}{2}$$

und die Potentielle Energie durch

$$U = m_1 g z_1 + m_2 g z_2$$

Als einzige generalisierte Koordinate wählen wir $z := z_1$ und substituieren $z_2 = Q - z - C_0 \cos\omega_0 t$. Für die Lagrange Funktion $\mathcal{L}$ ergibt sich

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{m_1 \dot{z}^2}{2} + \frac{m_2}{2} \cdot (-\dot{z} + \omega_0 C_0 \sin\omega_0 t)^2 - (m_1 g z + m_2 g(Q - z - C_0 \cos\omega_0 t))$$

woraus man auf folgende Lagrange Gleichung kommt

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{z}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z} = (m_1+m_2)\ddot{z} - C_0\omega_0^2 m_2\cos\omega_0 t + (m_1-m_2)g = 0$$

Die Bewegungsgleichung für z lautet also

$$\boxed{\ddot{z} = \frac{(m_2-m_1)g + C_0\omega_0^2 m_2\cos\omega_0 t}{m_1+m_2}}$$

Einsetzen von $\ddot{z}_1 = \ddot{z}$ bzw. $\ddot{z}_2 = C_0\omega_0^2\cos\omega_0 t - \ddot{z}_1$ zeigt dass diese wie erwartet identisch mit der schon oben angegebenen Bewegungsgleichung ist, und sich natürlich auch die gleichen Bahngleichungen ergeben.

Zwangskräfte

Die Zwangskraft $\vec{F}_i$ ist gegeben durch

$$\vec{F}_i = m_1\ddot{\vec{r}}_i + m_i g\cdot\vec{e}_z = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\cdot(2g + C_0\omega_0^2\cos\omega_0 t)\cdot\vec{e}_z$$

und ist demzufolge für beide Massen genau wie vorhin gleich!

Spezielles Anfangswertproblem

Einsetzen von $v_{1_0} = 0$ in die Bahngleichung führt zu

$$z_1 = \frac{g(m_2-m_1)}{2(m_1+m_2)}\cdot t^2 + \frac{m_2C_0}{m_1+m_2}\cdot(1-\cos\omega_0 t) + z_{1_0}$$

$$z_2 = \frac{g(m_1-m_2)}{2(m_1+m_2)}\cdot t^2 + \frac{m_1C_0}{m_1+m_2}\cdot(1-\cos\omega_0 t) + Q - C_0 - z_{1_0}$$

Die Masse m_1 ruht wenn $\dot{z}_1 = 0$ also

$$\sin\omega_0 t = t\cdot\underbrace{\frac{g(m_1-m_2)}{m_2C_0\omega_0}}_{\alpha}$$

Wir betrachten die Funktion

$$\vartheta(t) := \sin\omega_0 t - \alpha t$$

und untersuchen unter welchen Bedingungen diese positive Wurzeln hat. Dies kann nur der Fall sein wenn $t = 0$ oder wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt sind:

a) Es gilt $m_1 = m_2$ also $\alpha = 0$. Dann findet eine harmonische Schwingung der Masse m_1 um den Gleichgewichtspunkt z_{1_0} mit der Amplitude $\frac{C_0}{2}$ statt.

b) Es gilt $m_1 > m_2$ und $\alpha < \omega_0$. Dann gilt nämlich in einer Umgebung von $t = 0$ dass $\vartheta > 0$ da $\dot{\vartheta}(0) > 0$. Doch für $t \to \infty$ geht $\vartheta \to -\infty$ da $\alpha > 0$ weshalb es aufgrund des Zwischenwertsatzes noch eine Nullstelle geben muss!

c) Es gilt $m_2 > m_1$ also $\alpha < 0$ und $|\alpha|$ ist klein genug. Analytisch ist der Grenzwert von $|\alpha|$ nicht auszudrücken, doch eine obere Schranke kann z.b bei $\frac{\omega_0}{\pi}$ gesetzt werden.

Aufgabe 02

Bedingungen

Der Mittelpunkt des Stabes sei gegeben durch $\vec{R} = R_0 \cos\omega_0 t \cdot \vec{e}_x + R_0 \sin\omega_0 t \cdot \vec{e}_y$. Sei $\varphi \in [0, 2\pi)$ der *Linksschraubige* Winkel zwischen $\vec{L} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ und $\vec{e}_x$, also $\vec{L} = L_0 \cos\varphi \cdot \vec{e}_x + L_0 \sin\varphi \cdot \vec{e}_y$. Dann gilt

$$\vec{r}_1 = x_1 \cdot \vec{e}_x + y_1 \cdot \vec{e}_y = \vec{R} - \frac{1}{2} \cdot \vec{L} = \left(R_0 \cos\omega_0 t - \frac{L_0}{2} \cdot \cos\varphi\right) \cdot \vec{e}_x + \left(R_0 \sin\omega_0 t - \frac{L_0}{2} \cdot \sin\varphi\right) \cdot \vec{e}_y$$
$$\vec{r}_2 = x_2 \cdot \vec{e}_x + y_2 \cdot \vec{e}_y = \vec{R} + \frac{1}{2} \cdot \vec{L} = \left(R_0 \cos\omega_0 t + \frac{L_0}{2} \cdot \cos\varphi\right) \cdot \vec{e}_x + \left(R_0 \sin\omega_0 t + \frac{L_0}{2} \cdot \sin\varphi\right) \cdot \vec{e}_y$$

Sei ferner $\varphi_0 := \varphi(t = 0)$ der Anfangswinkel und $\Omega := \dot{\varphi}(t = 0)$ die Anfangs-Winkelgeschwindigkeit.

Lagrange II

Wir wählen als einzige generalisierte Koordinate den Winkel φ. Die kinetische Energie T ergibt sich als

$$T = \frac{m}{2} \cdot \left((\dot{\vec{r}}_1)^2 + (\dot{\vec{r}}_2)^2\right) = mR_0^2\omega_0^2 + \frac{mL_0^2\dot{\varphi}^2}{4}$$

Ein Potential existiert nicht da keine eingeprägten Kräfte wirken. Damit ergibt sich für die Lagrange Funktion $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L} = T = mR_0^2\omega_0^2 + \frac{mL_0^2\dot{\varphi}^2}{4}$$

Man erhält also die Lagrange Gleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = \frac{mL_0^2\ddot{\varphi}}{2} = 0 \;\Rightarrow\; \ddot{\varphi} = 0 \;\Rightarrow\; \varphi = \Omega t + \varphi_0$$

bzw. die Bahngleichung

$$\boxed{\vec{r}_{1,2} = \left(R_0 \cos\omega_0 t \mp \frac{L_0}{2} \cdot \cos(\Omega t + \varphi_0)\right) \cdot \vec{e}_x + \left(R_0 \sin\omega_0 t \mp \frac{L_0}{2} \cdot \sin(\Omega t + \varphi_0)\right) \cdot \vec{e}_y}$$

Lagrange I

Es gelten folgende Nebenbedingungen:

$$g_1 = x_1 + x_2 - 2R_0 \cos\omega_0 t = 0$$
$$g_2 = y_1 + y_2 - 2R_0 \sin\omega_0 t = 0$$
$$g_3 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - L_0^2 = 0$$

Woraus die 4 Lagrange Gleichungen folgen:

$$m\ddot{x}_1 = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k \cdot \frac{\partial g_k}{\partial x_1} = \lambda_1 + 2\lambda_3(x_1 - x_2)$$
$$m\ddot{x}_2 = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k \cdot \frac{\partial g_k}{\partial x_2} = \lambda_1 + 2\lambda_3(x_2 - x_1)$$
$$m\ddot{y}_1 = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k \cdot \frac{\partial g_k}{\partial y_1} = \lambda_2 + 2\lambda_3(y_1 - y_2)$$
$$m\ddot{y}_2 = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k \cdot \frac{\partial g_k}{\partial y_2} = \lambda_2 + 2\lambda_3(y_2 - y_1)$$

Einsetzen in die Nebenbedingungen $\ddot{g}_i$ ergibt

$$m\ddot{g}_1 = m\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2 + 2mR_0\omega_0^2\cos\omega_0 t = 2\lambda_1 + 2mR_0\omega_0^2\cos\omega_0 t = 0$$

$$m\ddot{g}_2 = m\ddot{y}_1 + m\ddot{y}_2 + 2mR_0\omega_0^2\sin\omega_0 t = 2\lambda_2 + 2mR_0\omega_0^2\sin\omega_0 t = 0$$

$$\ddot{g}_3 = 2(\dot{x}_1 - \dot{y}_1)^2 + 2(x_1 - x_2)(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + 2(\dot{y}_1 - \dot{y}_2)^2 + 2(y_1 - y_2)(\ddot{y}_1 - \ddot{y}_2)$$

$$= 2\underbrace{\left[(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 + (\dot{y}_1 - \dot{y}_2)^2\right]}_{(\dot{\vec{r}}_2 - \dot{\vec{r}}_1)^2} + \frac{8\lambda_3}{m}\cdot\underbrace{\left[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\right]}_{L_0^2} = 2\left|\dot{\vec{L}}\right|^2 + \frac{8\lambda_3 L_0^2}{m} = 2L_0^2\dot{\varphi}^2 + \frac{8\lambda_3 L_0^2}{m}$$

Die Lagrange-Multiplikatoren ergeben sich als

$$\lambda_1 = -m\omega_0^2 R_0\cos\omega_0 t \qquad \lambda_2 = -m\omega_0^2 R_0\sin\omega_0 t \qquad \lambda_3 = -\frac{m}{4L_0^2}\cdot\left((\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 + (\dot{y}_1 - \dot{y}_2)^2\right)$$

Die Bewegungsgleichungen lauten also

$$\ddot{x}_1 = -\omega_0^2 R_0\cos\omega_0 t - \frac{(x_1 - x_2)}{2L_0^2}\cdot\left((\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 + (\dot{y}_1 - \dot{y}_2)^2\right)$$

$$\ddot{x}_2 = -\omega_0^2 R_0\cos\omega_0 t - \frac{(x_2 - x_1)}{2L_0^2}\cdot\left((\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 + (\dot{y}_1 - \dot{y}_2)^2\right)$$

$$\ddot{y}_1 = -\omega_0^2 R_0\sin\omega_0 t - \frac{(y_1 - y_2)}{2L_0^2}\cdot\left((\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 + (\dot{y}_1 - \dot{y}_2)^2\right)$$

$$\ddot{y}_2 = -\omega_0^2 R_0\sin\omega_0 t - \frac{(y_2 - y_1)}{2L_0^2}\cdot\left((\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 + (\dot{y}_1 - \dot{y}_2)^2\right)$$

Bemerkung: Ersetzen von $(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 + (\dot{y}_1 - \dot{y}_2)^2 = L_0^2\dot{\varphi}^2$ zeigt dass diese die gleichen sind wie die im ersten Teil berechneten bzw. aus der doppelten Ableitung von $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ nach der Zeit resultierenden Ausdrücke, unter berücksichtigung dass $\ddot{\varphi} = 0$.