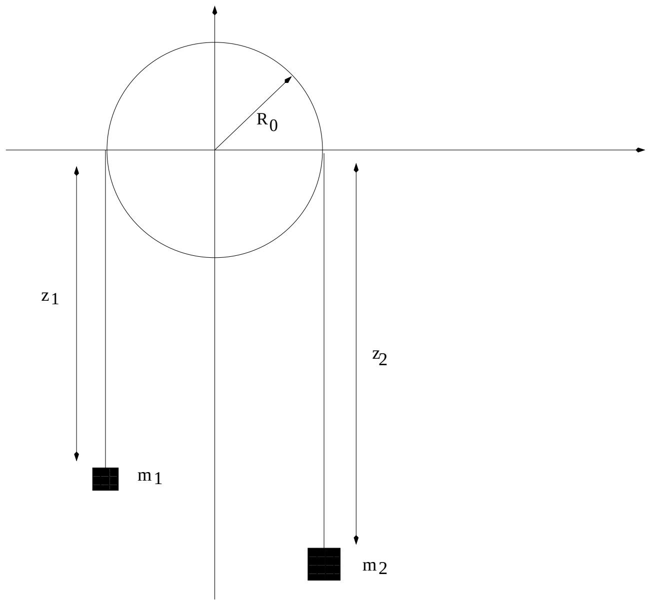
Übungen zur Theoretischen Mechanik – SS 2007

Blatt 11 – Abgabetermin 6.6.07

Thema: Lagrange I und Lagrange II

Aufg. 1



Gegeben ist eine gewichtslose, um den Koordinatenursprung drehbare Rolle, and der ein Faden angebracht ist, der über die Rolle (mit Radius $R_0 = const.$) läuft. An seinen Enden sind die Massen m_1 und m_2 befestigt, beide Massen können sich nur in z-Richtung bewegem. Auf die Massen m_1 und m_2 wirkt die Schwerkraft.

Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf, lösen Sie diese und bestimmen Sie die Zwangskäfte für die folgenden beiden Fälle:

(a) Der Faden dehnt sich während der Bewegung nicht, seine Länge ist

$$L = \pi R_0 - z_1 - z_2 + L_0 = const., \qquad L_0 = const.$$

(b) Der Faden soll nun dehnbar sein, und seine Länge nach folgendem Gesetz zeitlich ändern,

$$L(t) = \pi R_0 - z_1 - z_2 + L_0 = B_0 + C_0 \cos \omega_0 t,$$

wobei B_0, C_0 und ω_0 Konstanten sind.

(c) Lösen Sie die Aufgaben (a) und (b) mit Lagrange I.

(d) Lösen Sie die Aufgaben (a) und (b) mit Lagrange II.

(e) Lösen Sie nun das Anfangswertproblem

$$z_1(t=0) = z_{10}, \quad \dot{z}_1(t=0) = 0\,.$$

Wann gibt es Zeiten b_A, für die m_1 ruht ($\dot{z}_1(t_A) = 0$)?

Aufg. 2: Epizyklenmodell

Zwei Massenpunkte der gleichen Masse m sind durch einen starren, masselosen Stab der Länge $L_0 = const.$ verbunden. Der Mittelpunkt der Stabes kann sich nur auf dem Umfang eines Kreises mit festem Radius $R_0 = const. > L_0/2$ bewegen. Dieser Mittelpunkt des Stabes bewegt sich auf dem Kreis mit der konstaner Winkelgeschwindigkeit ω_0. Beide Massen bewegen sich nur in (x, y)-Ebene. Es wirken keinerlei eingeprägte Kräfte.

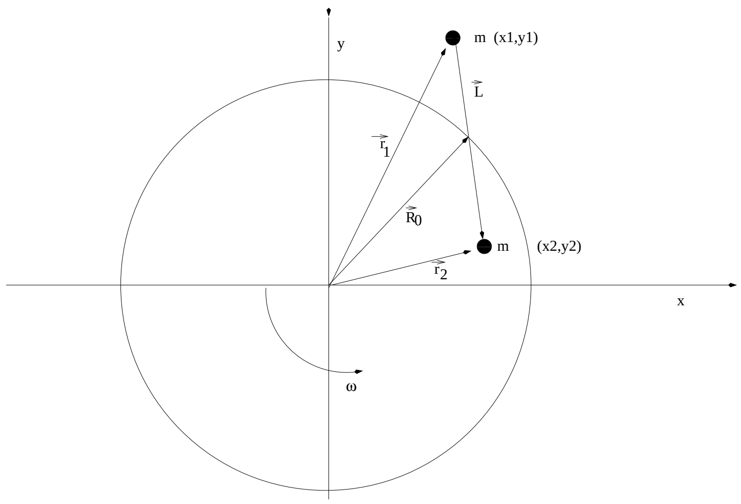


Abbildung 1: $\vec{r}_1 + \vec{L} = \vec{r}_2$, $\vec{r}_1 + \vec{L}/2 = \vec{R}$, $|\vec{L}| = L_0 = const.$

(a) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen für dieses Problem und lösen Sie diese. Verwenden Sie als erstes der Lagrangegleichungen 2. Art.

(b) Lösen Sie das Problem mit Hilfe der Lagrange-Gleichugen 1. Art, bestimmen Sie die Lagrangeschen Multiplikatoren und die Bewegungsgleichungen.

Hinweis: Wieviele generalisierte Koordinaten kann es bei diesem Problem geben?