Theoretische Mechanik
FSU Jena - SS 2007
Blatt 10 - Lösungen

Stilianos Louca

30. Juni 2007

Thema: D'Alembert Prinzip

Aufgabe 01

Anfangsbedingungen

Am Zeitpunkt $t_0 > 0$ seien: $\vartheta_0 := \vartheta(t_0),\ \varphi_0 := \varphi(t_0),\ \dot{\vartheta}(t_0) = v_{\vartheta_0},\ \dot{\varphi}(t_0) = v_{\varphi_0}$.
Durch die Nebenbedingung $\rho - ct = 0$ ergibt sich

$$\dot{\rho} = c,\ \ddot{\rho} = 0,\ \delta_\rho = 0 \tag{1}$$

und aufgrund des d'Alembert'schen Prinzips

$$m\ddot{\vec{r}} \cdot \delta_{\vec{r}} = 0 \tag{2}$$

Bewegungsgleichungen

In Kugelkoordinaten $(\rho, \vartheta, \varphi)$ gilt allgemein

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\vartheta}^2 - \rho\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta) \cdot \vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\vartheta} + 2\dot{\rho}\dot{\vartheta} - \rho\dot{\varphi}^2 \sin\vartheta\cos\vartheta) \cdot \vec{e}_\vartheta + (\rho\ddot{\varphi}\sin\vartheta + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}\sin\vartheta + 2\rho\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\cos\vartheta) \cdot \vec{e}_\varphi$$

$$\delta_{\vec{r}} = \delta_\rho \cdot \vec{e}_\rho + \rho\delta_\vartheta \cdot \vec{e}_\vartheta + \rho\sin\vartheta\delta_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi$$

woraus durch Gl. 2 und der Tatsache dass die virtuelle Verrückung $\delta_\rho = 0$ folgt:

$$\underbrace{m(\rho\ddot{\vartheta} + 2\dot{\rho}\dot{\vartheta} - \rho\dot{\varphi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta) \cdot \rho}_{\stackrel{!}{=}0}\delta_\vartheta + \underbrace{m(\rho\ddot{\varphi}\sin\vartheta + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}\sin\vartheta + 2\rho\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\cos\vartheta) \cdot \rho\sin\vartheta}_{\stackrel{!}{=}0}\delta_\varphi = 0$$

Da $\delta_\vartheta,\ \delta_\varphi$ unabhängig sind, folgt in Kombination mit Gl. 1:

$$\ddot{\vartheta} \cdot t = t\dot{\varphi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta - 2\dot{\vartheta} \quad \wedge \quad \ddot{\varphi} \cdot t\sin\vartheta = -2\dot{\varphi}\sin\vartheta - 2t\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\cos\vartheta \tag{3}$$

Zwangskraft & Drehimpulserhaltung

Die Zwangskraft $\vec{F}_*$ ist gegeben durch

$$\vec{F}_* = m\ddot{\vec{r}} = m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\vartheta}^2 - \rho\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta) \cdot \vec{e}_\rho + 0 + 0 = -ctm(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta) \cdot \vec{e}_\rho$$

und steht dementsprechend **senkrecht** auf der Kugeloberfläche. Es gilt also Drehimpulserhaltung da es sich hierbei um eine Zentralkraft handelt:

$$\vec{L} = m \cdot \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = m\rho \cdot \vec{e}_\rho \times (\dot{\rho} \cdot \vec{e}_\rho + \rho\dot{\vartheta} \cdot \vec{e}_\vartheta + \dot{\varphi}\rho\sin\vartheta \cdot \vec{e}_\varphi) = m\rho^2(\dot{\vartheta} \cdot \vec{e}_\varphi - \dot{\varphi}\sin\vartheta \cdot \vec{e}_\vartheta) = \vec{const}$$

Für die Komponenten L_x, L_y, L_z des Drehimpulses in kartesischen Koordinaten gilt also

$$L_x := -m\rho^2\dot\vartheta\sin\varphi - m\dot\varphi\rho^2\sin\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi = const \;\Rightarrow\; t^2\dot\vartheta\sin\varphi + \dot\varphi t^2\sin\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi = \frac{-L_x}{mc^2} =: l_x = const$$

$$L_y := m\rho^2\dot\vartheta\cos\varphi - m\dot\varphi\rho^2\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi = const \;\Rightarrow\; t^2\dot\vartheta\cos\varphi - \dot\varphi t^2\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi = \frac{L_y}{mc^2} =: l_y = const$$

$$L_z := m\dot\varphi\rho^2\sin^2\vartheta = const \;\Rightarrow\; \dot\varphi t^2\sin^2\vartheta = \frac{L_z}{mc^2} =: l_z = const$$

Zusammenbasteln führt zu

$$l_x^2 + l_y^2 = t^4\dot\vartheta^2 + \dot\varphi^2 t^4\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta = t^4\dot\vartheta^2 + l_z^2\cdot\frac{\cos^2\vartheta}{\sin^2\vartheta}$$

$$\Rightarrow \int_{\vartheta_0}^{\vartheta}\frac{\sin u}{\sqrt{l^2\sin^2 u - l_z^2}}\,du = \int_{t_0}^{t}\frac{du}{u^2} = \frac{1}{t_0} - \frac{1}{t},\; l^2 := l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 = \frac{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2}{m^2c^4} = \frac{\vec{L}^2}{m^2c^4}$$

Variante zur Herleitung des Integrals

Aus Gl. 3 folgt im Zusammenhang mit dem oberen Ausdruck für den Drehimpuls

$$t^2\ddot\vartheta + 2\dot\vartheta t - t^2\dot\varphi^2\sin\vartheta\cos\vartheta = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}(t^2\dot\vartheta) = t^2\dot\varphi^2\sin\vartheta\cos\vartheta = \frac{l_z\cos\vartheta}{t^2\sin^3\vartheta}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left((t^2\dot\vartheta)^2\right) = \dot\vartheta t^2\cdot\frac{d}{dt}(t^2\dot\vartheta) = \frac{l_z^2\cos\vartheta\;\dot\vartheta}{\sin^3\vartheta} = \frac{d}{dt}\left(\frac{-l_z^2}{\sin^2\vartheta}\right)$$

$$\Rightarrow (t^2\dot\vartheta)^2 = \frac{-l_z^2}{\sin^2\vartheta} + C,\; C : const \;\rightsquigarrow\; C = (t_0^2 v_\vartheta^0)^2 + \frac{l_z^2}{\sin^2\vartheta_0} = (t_0^2 v_\vartheta^0)^2 + t_0^4\sin^2\vartheta_0 v_\varphi^{0^2} = t_0^4\cdot\left(v_\vartheta^{0^2} + \sin^2\vartheta_0\; v_\varphi^{0^2}\right)$$

$$\Rightarrow \dot\vartheta = \frac{1}{t^2}\cdot\sqrt{\frac{-l_z^2}{\sin^2\vartheta^2} + C} \;\Rightarrow\; \int_{\vartheta_0}^{\vartheta}\frac{\sin u\; du}{\sqrt{C\sin u - l_z^2}} = \int_{t_0}^{t}\frac{du}{u^2} = \frac{1}{t_0} - \frac{1}{t}$$

Bemerkung: Durch einfaches Vergleichen erkennt man dass wie erwartet $C = l^2$, hier also die gleiche DGL bzw. Integral wie vorhin steht.

Umgehung des Problems:

Oberes Integral ist keine gemütliche Angelegenheit, weswegen wir das Problem durch geeignete Wahl der Koordinatensystem-Orientierung vereinfachen werden.
Sei o.B.d.A $\vartheta_0 = \varphi_0 = 0$. Dann gilt automatisch $l_z = 0$.
Ist $v_\vartheta^0 = 0$ so ist automatisch auch $v_\varphi^0 = 0$[1] und demzufolge $\vartheta = \vartheta_0 = \varphi = \varphi_0 = 0\;\forall\; t \geq t_0$ da auch die Beschleunigung in Richtung $\vec{e}_\vartheta$ und $\vec{e}_\varphi$ verschwindet, die Kugel bleibt also am selben Platz sitzen.
Ist jedoch $v_\vartheta^0 \neq 0$ (o.B.d.A $v_\vartheta^0 > 0$) so muss $\dot\varphi = 0$ da $l_z \equiv 0$ und demzufolge $\varphi = \varphi_0\;\forall\; t \geq t_0$. Somit folgt aber aus Gl. 3

$$\ddot\vartheta t + 2\dot\vartheta = 0 \;\Rightarrow\; \ln\left|\frac{\dot\vartheta}{v_\vartheta^0}\right| = \int_{v_\vartheta^0}^{\dot\vartheta}\frac{du}{u} = -2\int_{t_0}^{t}\frac{dt}{t} = \ln\left|\frac{t_0^2}{t^2}\right|$$

$$\Rightarrow \dot\vartheta = \frac{v_\vartheta^0 t_0^2}{t^2} \;\rightsquigarrow\; \vartheta = \int_{t_0}^{t}\frac{v_\vartheta^0 t_0^2}{t^2}\,dt = v_\vartheta^0 t_0\cdot\left(1 - \frac{t_0}{t}\right)$$

und für die Zwangskraft

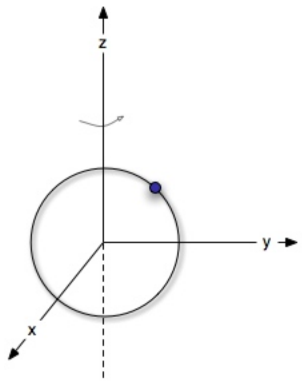
[1] Eigentlich ist φ an diesem *Pol* gar nicht richtig definiert

$$\boxed{\vec{F}_* = -\frac{cmv_\vartheta^{0^2} t_0^4}{t^3} \cdot \vec{e}_\rho}$$

Aufgabe 02

Anfangsbedingungen

Der Draht rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die z Achse.



Unter Verwendung von Kugelkoordinaten $(\rho, \vartheta, \varphi)$ sei $\varphi_0 := \varphi(t_0),\ \vartheta_0 := \vartheta(t_0),\ v_{\vartheta_0} := \dot{\vartheta}(t_0),\ t_0 > 0$ und der Radius ρ gegeben durch $\rho = ct,\ 0 \neq c : const$. Aufgrund der Nebenbedingungen $\rho - ct = 0,\ \varphi = \omega t + \varphi_0$ gilt

$$\dot{\rho} = c,\ \ddot{\rho} = 0,\ \delta_\rho = 0$$

$$\dot{\varphi} = \omega,\ \ddot{\varphi} = 0,\ \delta_\varphi = 0$$

$$\rightarrow\ \delta_{\vec{r}} = \delta_\rho \cdot \vec{e}_\rho + \rho\delta_\vartheta \cdot \vec{e}_\vartheta + \rho \sin\vartheta \delta_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi = \rho\delta_\vartheta \cdot \vec{e}_\vartheta$$

Rotierender Draht: $\omega \neq 0$

Aufgrund des d'Alembert'schen Prinzips muss gelten

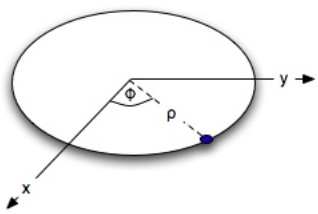
$$\ddot{\vec{r}} \cdot \delta_{\vec{r}} = (\rho\ddot{\vartheta} + 2\dot{\rho}\dot{\vartheta} - \rho\dot{\varphi}^2 \sin\vartheta\cos\vartheta) \cdot \rho\delta_\vartheta = c \cdot (t\ddot{\vartheta} + 2\dot{\vartheta} - 2t\omega^2 \sin\vartheta\cos\vartheta) \cdot \rho\delta_\vartheta = 0$$

Da δ_ϑ beliebig sein kann muss gelten

$$\boxed{t\ddot{\vartheta} + 2\dot{\vartheta} - t\omega^2 \sin\vartheta\cos\vartheta = 0}$$

Still stehender Draht: $\omega = 0$

Das ganze findet in einer festen Ebene statt weshalb wir auf ebene Polarkoordinaten (ρ, φ) zurückgreifen werden.



In Polarkoordinaten gilt allgemein

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) \cdot \vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) \cdot \vec{e}_\varphi$$

$$\delta_{\vec{r}} = \delta_\rho \cdot \vec{e}_\rho + \rho\delta_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi$$

Aufgrund des d'Alembert'schen Prinzips gilt

$$m\ddot{\vec{r}} \cdot \delta_{\vec{r}} = m\rho\delta_\varphi \cdot \ddot{\vec{r}} \cdot \vec{e}_\varphi = m\rho(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) \cdot \delta_\varphi = 0$$

$$\Rightarrow\ \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} = 0\ \Rightarrow\ t\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi} = 0\ \Rightarrow\ \ln\left|\frac{\dot{\varphi}}{v_{\varphi_0}}\right| = \int_{v_{\varphi_0}}^{\dot{\varphi}} \frac{du}{u} = -2 \cdot \int_{t_0}^{t} \frac{du}{u} = \ln\left(\frac{t_0}{t}\right)^2\ \Rightarrow\ \dot{\varphi} = v_{\varphi_0} \cdot \left(\frac{t_0}{t}\right)^2$$

$$\Rightarrow\ \varphi = \varphi_0 + \int_{t_0}^{t} v_{\varphi_0} \frac{t_0^2}{u^2}\ du = \varphi_0 + v_{\varphi_0} t_0 \left(1 - \frac{t_0}{t}\right)$$

Die Zwangskraft $\vec{F}_*$ ist gegeben durch

$$\vec{F}_* = m\ddot{\vec{r}} = m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) \cdot \vec{e}_\rho + 0 = -\frac{mcv_{\varphi_0}^2 t_0^4}{t^3} \cdot \vec{e}_\rho$$

Variante

Es ist ersichtlich dass die Zwangskraft $\vec{F}_*$ senkrecht zur Schleife gerichtet ist und somit eine Zentralkraft ist. Demzufolge gilt Drehimpulserhaltung, also

$$\dot{\varphi}\rho^2 m = \dot{\varphi}c^2t^2m = v_{\varphi_0}\rho_0^2 m = v_{\varphi_0}c^2t_0^2 m = const\ \Rightarrow\ \dot{\varphi} = v_{\varphi_0} \cdot \left(\frac{t_0}{t}\right)^2$$