Theoretische Mechanik
FSU Jena - SS 2007
Blatt 09 - Lösungen

Stilianos Louca

19. Juni 2007

Thema: Gekoppelte Schwingungen

Aufgabe 01

Bezeichnen: x_i^0 die Gleichgewichtslagen und $\overline{x}_i := x_i - x_i^0$ die *Relativen* Auslenkungen der drei Massen. Definieren ferner $\tilde{x}_i := \overline{x}_i\sqrt{m_i}$, $\overline{x} := (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3) \in \mathbb{R}^3$, $\tilde{x} := (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) \in \mathbb{R}^3$ und $m := m_1 + m_2 + m_3$.
Es gilt

$$m_1\ddot{\overline{x}}_1 = (\overline{x}_2 - \overline{x}_1)\cdot k_1,\ m_2\ddot{\overline{x}}_2 = (\overline{x}_1 - \overline{x}_2)\cdot k_1 + (\overline{x}_3 - \overline{x}_2)\cdot k_2,\ m_3\ddot{\overline{x}}_3 = (\overline{x}_2 - \overline{x}_3)\cdot k_2$$

bzw.

$$\ddot{\overline{x}} = \ddot{\tilde{x}} = -V\cdot\tilde{x},\ V := \begin{pmatrix} \frac{k_1}{m_1} & -\frac{k_1}{\sqrt{m_1m_2}} & 0 \\ -\frac{k_1}{\sqrt{m_1m_2}} & \frac{k_1+k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{\sqrt{m_2m_3}} \\ 0 & -\frac{k_2}{\sqrt{m_2m_3}} & \frac{k_2}{m_3} \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte $\lambda_1 =: \omega_1^2,\ \lambda_2 =: \omega_2^2,\ \lambda_3 =: \omega_3^2 \in \mathbb{R}$ von V errechnen sich durch das entsprechende charakteristische Polynom:

$$P_\lambda(V) = \lambda^3 - \lambda^2\cdot\underbrace{\left(\frac{k_1+k_2}{m_2} + \frac{k_1}{m_1} + \frac{k_2}{m_3}\right)}_{\Omega} + \lambda\cdot\underbrace{\frac{mk_1k_2}{m_1m_2m_3}}_{\Phi} \overset{!}{=} 0$$

Die Eigenfrequenzen, also die Lösungen der oberen Gleichung, ergeben sich als

$$\omega_1^2 = 0,\ \omega_{2,3}^2 = \frac{\Omega \pm \sqrt{\Omega^2 - 4\Phi}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{k_1+k_2}{m_2} + \frac{k_1}{m_1} + \frac{k_2}{m_3}\right) \pm \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\left(\frac{k_1+k_2}{m_2}\right)^2 + \frac{k_1^2}{m_1^2} + \frac{k_2^2}{m_3^2} + \frac{2k_1^2}{m_1m_2} + \frac{2k_2^2}{m_2m_3} - \frac{2k_1k_2(m_1+m_2+m_3)}{m_1m_2m_3}}$$

Für $\omega_1 = 0$ ergibt sich der Eigenvektor (nicht normiert!)

$$\vec{u}_1 = (\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2}, \sqrt{m_3}) \ \Rightarrow\ \frac{\vec{u}_1}{|\vec{u}_1|}\cdot\ddot{\tilde{x}} = 0 \ \Rightarrow\ \vec{u}_1\cdot\tilde{x} = v_0\cdot t + x_0,\ v_0, x_0 : const \ \Rightarrow\ m_1\overline{x}_1 + m_2\overline{x}_2 + m_3\overline{x}_3 = v_0t + x_0$$

was im Grunde genommen eine gleichförmige, geradlinige Bewegung des Molekül-Schwerpunktes bedeutet[1].
Bemerkung: Obere Erkenntnis ist unabhängig von den anderen Schwingungen!

---

[1] Impulserhaltung

Spezialfall : $k_1 = k_2 =: k$ **und** $m_1 = m_3 \neq m_2$

Der Ausdruck reduziert sich auf

$$P_\lambda(V) = \lambda^3 - \lambda^2 \cdot 2k \cdot \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) + \lambda \cdot \frac{mk^2}{m_1^2 m_2} \stackrel{!}{=} 0$$

woraus sich folgende Eigenwerte bzw. Eigenfrequenzen ergeben:

$$\omega_1^2 = 0,\ \omega_{2,3}^2 = k \cdot \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \pm \frac{1}{m_2}\right)$$

Die zugehörigen Eigenvektoren (nicht normiert!) sind die Spalten der Matrix C:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} & -2\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

was soviel bedeutet wie

$$C^{-1} \cdot \ddot{\tilde{x}} = -(C^{-1} \cdot V \cdot C) \cdot (C^{-1} \cdot \tilde{x}),\ \vec{p} := C^{-1} \cdot \tilde{x} = \begin{pmatrix} A_1 t + x_0 \\ A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ A_3 \cos(\omega_3 t + \varphi_3) \end{pmatrix},\ A_1, A_2, A_3, \varphi_2, \varphi_3, x_0 : const$$

$$\Rightarrow\ \tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} = C \cdot \vec{p}$$

$$\Rightarrow\ \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{pmatrix} = \frac{A_1 t + x_0}{\sqrt{m_1}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{A_2}{\sqrt{m_1}} \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2m_1}{m_2} \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{A_3}{\sqrt{m_1}} \cdot \cos(\omega_3 t + \varphi_3) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die drei Schwingungs-Komponenten in $\vec{p}$ sind die soggenannten *Fundamentalschwingungen* des Systems.

Auf Deutsch:

- Ist $A_2 = A_3 = 0 \neq v_0$ so besteht die Bewegung des Moleküls einfach nur aus einer Translationsbewegung entlang der x-Achse. Es gibt keine Schwingungen zwischen den Atomen:
$$\overline{x}_1 = \overline{x}_2 = \overline{x}_3 = \frac{A_1 t + x_0}{\sqrt{m_1}}$$
- Ist $x_0 = v_0 = A_3 = 0 \neq A_2$ so schwingen im Endeffekt die Massen m_1 und m_3 in Phase mit den gleichen Amplituden um deren Gleichgewichtslagen wobei sich m_2 stets in entgegengesetzter Richtung bewegt. Das Molekül führt also eine Art *Bauchtanz* um seinen Schwerpunkt durch:
$$\overline{x}_1 = \overline{x}_3 = \frac{A_2}{\sqrt{m_1}} \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2),\ \overline{x}_2 = -\frac{2A_2\sqrt{m_1}}{m_2} \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$
- Ist $x_0 = v_0 = A_2 = 0 \neq A_3$ so schwingen nur die beiden *Randatome* m_1 und m_3 mit einer gegenseitigen Phasenverschiebung von π um deren Gleichgewichtslagen umher, das mittlere Atom bleibt still:
$$\overline{x}_3 = -\overline{x}_1 = \frac{A_3}{\sqrt{m_1}} \cdot \cos(\omega_3 t + \varphi_3),\ \overline{x}_2 = 0$$

Aufgabe 02

a)

$$m_n \ddot{y}_n = (y_{n-1} + y_{n+1} - 2y_n) \cdot k$$

b)

$$\dot{y}_{n(k)} = i\omega \cdot A_k e^{i(kna+\omega t)},\ \ddot{y}_{n(k)} = -\omega^2 A_k e^{i(kna+\omega t)} = -\omega^2 y_{n(k)}$$

c) Durch einsetzen des Ansatzes $y_{n(k)} = A_k e^{i(\omega t + kna)}$ in die Bewegungsgleichung ergibt sich

$$m_n \ddot{y}_{n(k)} = -m\omega^2 y_{n(k)} = (y_{n-1} + y_{n+1} - 2y_n) \cdot k = y_n k \cdot \left(e^{-ika} + e^{iak} - 2\right) = y_n k \cdot (2\cos ka - 2)$$

woraus folgt dass

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{2k \cdot (1 - \cos ka)}{m}}}$$

Da die Funktion $\omega(k, a)$ aufgrund der cos() Funktion bzgl. k periodisch ist, genauer gesagt gilt

$$\omega\left(k + \frac{2l\pi}{a}, a\right) = \omega(k, a),\ \cos\left(k + \frac{(2l+1)\pi}{a}, a\right) = \omega(-k, a),\ \forall\ l \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow\ \forall\ k \in \mathbb{R} : \exists\ \xi \in \left(-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right) : \omega(k, a) = \omega(\xi, a)$$

kann man k auf den Bereich $\left(-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right)$beschränken.

d) Aufgrund der Natur des Ansatzes gilt

$$y_{n(k)}(t) = A_k e^{i(\omega t + kna)} = y_{n+N}(t) = A_k e^{i(\omega t + kna + kNa)}\ \Rightarrow\ e^{iNka} = 1\ \Rightarrow\ k = \frac{2\pi l}{Na},\ l \in \mathbb{Z}$$