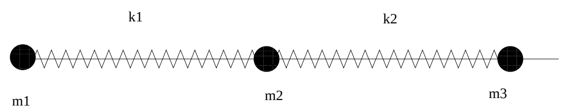
Übungen zur Theoretischen Mechanik – SS 2007

Blatt 9 – Abgabetermin 22.6.07

Thema: Gekoppelte Schwingungen

Aufg. 1

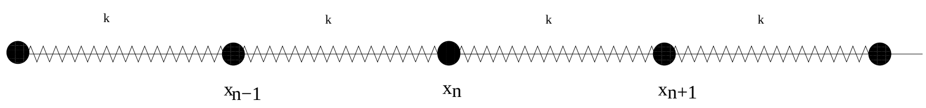
(a) Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen eines dreiatomigen, längs der x-Achse frei beweglichen Moleküls mit den Atomen der Massen m_1, m_2, m_3, die längs der x-Achse frei schwingen können. Das zwischenatomare Potential sei harmonisch (mit Federkonstanten k_1 und k_2), siehe Abb.



(b) Bestimmen Sie die Normalschwingungen und diskutieren Sie diese für den Spezialfall $k_1 = k_2 = k$, $m_1 = m_3 \neq m_2$.

Aufg. 2

Nun werde das dreitomige Molekül nach beiden Richtungen bis ins Unendliche erweitert, so daß man eine unendliche lineare Kette als eindimensionales Kristallmodell bekommt, siehe Abb.



Die Massen m_n, die alle gleich sind, sollen sich wieder nur längs der x-Achse bewegen können, und die Rückstellkräfte zu den Gleichgewichtslagen $x_n^{(0)} = an$ (a ist die Gitterkonstante) seien wieder durch harmonische Federn, die alle die Federkonstante k haben, angenommen.

(a) Geben Sie die Bewegungsgleichungen für die Massenpunkte dieser unendlich langen Kette an, unter Verwendung det abhängigen Variablen

$$y_n(t) = x_n(t) - x_n^{(0)}.$$

(b) Zeigen Sie, daß durch

$$y_{n\,(k)}(t) = q_k(t) \exp\left[ikna\right] \qquad \text{mit} \quad q_k(t) = A_k \exp\left[i\omega t\right]$$

Normalkoordinaten definiert werden.

(c) Bestimmen Sie die Dispersionsrelation $\omega_k = \omega_k(k, a)$.

Die gefundene Lösung ist durch die Wellenzahl k charakterisiert, die zunächst beliebige Werte annehmen kann.

Begründen Sie, daß k auf den Bereich $-\frac{\pi}{a} \leq k \leq \frac{\pi}{a}$ beschränkt werden kann.

(d) Die physikalische Randbedingung einer endlichen Kette aus N Massen kann durch die periodische Randbedingung

$$y_{n\,(k)}(t) = y_{n+N\,(k)}(t)$$

simuliert werden. Zu welchen diskreten Werten von k führt diese Randbedingung?