Theoretische Mechanik
FSU Jena - SS 2007
Blatt 08 - Lösungen

Stilianos Louca

21. Juli 2007

Thema: N-Körperproblem und Erhaltungssätze

Aufgabe 01

Bezeichnen: E_k bzw. U als die gesamte kinetische bzw. Potentielle Energie des Systems, und $E := E_k + U = const.$

a) Da die Körper im Endlichen bleiben gilt nach dem Virialsatz

$$2 \cdot \overline{E_k} = \overline{\sum_\nu m_\nu \cdot \left(\dot{\vec{r}}_\nu\right)^2} = \overline{\sum_\nu \vec{r}_\nu \cdot \nabla_\nu \cdot U}$$

Da im Falle der Gravitationskraft das Potential U homogen vom Grad -1 ist, folgt

$$2\overline{E_k} = \overline{\sum_\nu -U_\nu} = -\overline{U}$$

bzw. für jeden Zeitpunkt t

$$E = E_k(t) + U(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \{E_k(u) + U(u)\}\, du = \overline{E_k(t) + U(t)} = -\overline{E_k}(t) = -\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} E_k(u)\, du < 0$$

da die Gesamtenergie $E = E_k(t) + U(t)$ zeitlich konstant ist. $\square$

b) Aus dem 2en Newtonschen Axiom und der Tatsache dass $U \le 0$ und $E = const$ folgt

$$\sum_i \frac{d}{dt}(m_i \vec{r}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i) = \sum_i m_i \left(\dot{\vec{r}}_i\right)^2 - \sum_i \vec{r}_i \nabla_i U = E_k + (E_k + U) \ge E_k + U = E > 0$$

$$\Rightarrow \left[\sum_i m_i \cdot \vec{r}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i\right]_0^\infty = \int_0^\infty \left\{\sum_i \frac{d}{dt}(m_i \cdot \vec{r}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i)\right\} dt \ge \int_0^\infty E\, dt = E \cdot \int_0^\infty dt = \infty$$

$$\Rightarrow \sum_i m_i \cdot \vec{r}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i \overset{t\to\infty}{\to} \infty$$

woraus folgt dass mindestens ein Ausdruck $\vec{r}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i$ zu ∞ geht.
In Kugelkoordinaten ausgedrückt hiese das für den Körper:

$$\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = \rho \cdot \vec{e}_\rho \cdot (\dot{\rho} \cdot \vec{e}_\rho + \rho\dot{\vartheta} \cdot \vec{e}_\vartheta + \rho\dot{\varphi} \sin\vartheta \cdot \vec{e}_\varphi) = \rho\dot{\rho} \to \infty,\ \rho > 0$$

Nehmen wir an dass alle ρ_i endlich bleiben, dann müsse mindestens ein $\dot{\rho}_i$ mit der Zeit zu ∞ gehen, doch dies wäre ein Widerspruch denn dieser Körper würde auch wieder ins unendliche Fliegen. Also

$$\exists\ i : \vec{r}_i \to \infty \quad \square$$

Aufgabe 02

Bemerkung: Im folgenden durchlaufen die Indizes i, j, k die Werte $1, 2, 3$. Tauchen alle 3 in einem Ausdruck auf, so sind diese Paarweise verschieden gemeint!

a) Die Bewegungsgleichungen für die drei Körper m_1, m_2, m_3 in den Positionen $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ sind gegeben durch

$$\ddot{\vec{r}}_i = G \cdot \left[\frac{m_j \vec{r}_{ij}}{|\vec{r}_{ij}|^3} + \frac{m_k \vec{r}_{ik}}{|\vec{r}_{ik}|^3} \right], \; \vec{r}_{ij} := \vec{r}_j - \vec{r}_i$$

b) Der Schwerpunkt $\vec{r}_c$ ist gegeben durch

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{3} m_i \cdot \vec{r}_i \; , \; m := \sum_{i=1}^{3} m_i$$

Unter der Annahme dass auf die Planeten keine äußeren Kräfte wirken und o.B.d.A $\dot{\vec{r}}_c(0) = 0$ gilt $\dot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_c = 0 \; \forall \; t$. Ferner folgt dass die Rotation um den Ursprung erfolgen muss! Wir setzten unseren neuen Koordinatenursprung in $\vec{r}_c$ so dass wir ab nun alle Positionen $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ bzgl. $\vec{r}_c$ meinen. Folglich ist jetzt auch $\vec{r}_c = 0$. Aufgrund der Problemstellung ist jetzt $|\vec{r}_{ij}| =: s = const \; \forall \; i \neq j$ wobei s die Kantenlänge des Dreiecks sei, weshalb wir schreiben können

$$\ddot{\vec{r}}_i = \frac{G}{s^3} \cdot [m_j \vec{r}_{ij} + m_k \vec{r}_{ik}] = \frac{G}{s^3} \cdot [m_j \vec{r}_j - m_j \vec{r}_i + m_k \vec{r}_k - m_k \vec{r}_i] = \frac{G}{s^3} \cdot [-m_i \vec{r}_i - m_j \vec{r}_i - m_k \vec{r}_i] = -\frac{Gm}{s^3} \cdot \vec{r}_i$$

Da diese bzgl. dem Ursprung **Radiale** Beschleunigung gleich der *Zentripetalbeschleunigung* ist gilt

$$-\omega^2 \cdot \vec{r}_i = -\frac{Gm}{s^3} \cdot \vec{r}_i \;\Rightarrow\; \omega = \sqrt{\frac{Gm}{s^3}}$$

c) Da $m_3 << m_1, m_2$ können wir annehmen dass

$$0 = \vec{r}_c = \frac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \;\Rightarrow\; \vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1} \cdot \vec{r}_2 \tag{1}$$

wenn wir den Koordinatenursprung O in den Schwerpunkt setzen. Der Schwerpunkt liegt außerdem auf der Verbindungslinie $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ und es gilt $\vec{r}_1 \parallel -\vec{r}_2$ also $r_{ij} = r_i + r_j$. Die Bewegung der beiden Körper m_1, m_2 wird ferner nicht von m_3 beeinflusst:

$$\ddot{\vec{r}}_i = \frac{m_j G \cdot \vec{r}_{ij}}{|\vec{r}_{ij}|^3}, \; i, j = 1, 2, \; i \neq j$$

Aus

$$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i = -\frac{m_i}{m_j} \cdot \vec{r}_i - \vec{r}_i = -\frac{m_i + m_j}{m_j} \cdot \vec{r}_i$$

folgt

$$\ddot{\vec{r}}_i = -\frac{m_j^3 G}{r_i^3 (m_i + m_j)^2} \cdot \vec{r}_i$$

weshalb analog zu vorhin, unter der Berücksichtigung dass die Rotation wieder um den Schwerpunkt verläuft, gilt

$$-\omega_i^2 \cdot \vec{r}_i = \ddot{\vec{r}}_i \;\Rightarrow\; \omega_i = \frac{m_j}{r_i (m_i + m_j)} \cdot \sqrt{\frac{m_j G}{r_i}}$$

Bemerkung: Wie erwartet ergibt sich die Winkelgeschwindigkeit ω_j des anderen Körpers mit Hilfe von Gl. 1

$$\omega_j = \frac{m_i}{r_j (m_j + m_i)} \cdot \sqrt{\frac{m_i G}{r_j}} = \frac{m_i}{\frac{m_i}{m_j} \cdot r_i \cdot (m_i + m_j)} \cdot \sqrt{\frac{m_i G}{\frac{m_i}{m_j} \cdot r_i}} = \frac{m_j}{r_i (m_i + m_j)} \cdot \sqrt{\frac{m_j G}{r_i}} = \omega_i =: \omega$$

als die gleiche! Aus

$$r_i = \frac{m_j}{m_i + m_j} \cdot r_{ij}$$

folgt

$$\boxed{\omega = \frac{1}{r_{ij}} \cdot \sqrt{\frac{G(m_1+m_2)}{r_{ij}}}}$$

d) Das mittrotierende Koordinatensystem sei so orientiert dass $\vec{\omega} \parallel \vec{e}_z$.

- Die Bewegungsgleichung für den Körper m_3 ist gegeben durch

$$m_3 \cdot \ddot{\vec{r}}_3 = \vec{F}_3 = \vec{F}_G + 2m_3 \cdot \dot{\vec{r}}_3 \times \vec{\omega} - m_3 \cdot \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_3)$$

wobei

$$\vec{F}_G = m_3 G \cdot \left[\frac{m_1}{|\vec{r}_{31}|^3} \cdot \vec{r}_{31} + \frac{m_2}{|\vec{r}_{32}|^3} \cdot \vec{r}_{32} \right]$$

die Gravitationskraft ist.

- **Bezeichnen jetzt:** $\vec{r} := \vec{r}_3,\ \vec{F} := \vec{F}_3$
Die Änderung der kinetischen Energie T des Körpers ist dort (in Zylinderkoordinaten) gegeben durch

$$\frac{dT}{dt} = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{F}_r = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{F}_G + 2m \cdot \dot{\vec{r}} \cdot (\dot{\vec{r}} \times \omega) - \dot{\vec{r}} \cdot (\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})) = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{F}_G - (\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{\omega})$$

$$= \dot{\vec{r}} \cdot \vec{F}_G - m\omega^2 \cdot (\vec{e}_z \times (\rho \cdot \vec{e}_\rho + z\vec{e}_z)) \cdot [(\dot{\rho} \cdot \vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi + \dot{z} \cdot \vec{e}_z) \times \vec{e}_z] = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{F}_G - m\omega^2 \cdot \rho \cdot \vec{e}_\varphi \cdot (-\dot{\rho} \cdot \vec{e}_\varphi + \rho\dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi)$$

$$= \dot{\vec{r}} \cdot \vec{F}_G + m\omega^2 \rho\dot{\rho}$$

Bemerkung: Die Massen m_1 und m_2 sind im mitrotierenden System still und spannen so ein konservatives stationäres Kraftfeld auf! Die potentielle Energie U_G der Masse m_3 bzgl. der Kraft $\vec{F}_G$ ist an jedem Zeitpunkt gegeben durch

$$U_G(\vec{r}) = -m_3 G \cdot \left[\frac{m_1}{|\vec{r}_{31}|} + \frac{m_2}{|\vec{r}_{32}|} \right],\ \vec{F}_G = -\vec{\nabla} \cdot U_G$$

Analog definieren wir ein Potential $U_z(\rho)$ für die Kraft $\vec{F}_z = m\omega^2\rho \cdot \vec{e}_\rho$

$$U_z(\rho) = -\frac{m\omega^2\rho^2}{2},\ \vec{F}_z = -\vec{\nabla} \cdot U_z$$

weshalb wir jetzt schreiben können

$$\frac{dT}{dt} = \left[-\vec{\nabla} \cdot (U_z + U_G) \right] \cdot \dot{\vec{r}} \Rightarrow \frac{d}{dt}(T + U_G + U_z) = 0$$

und so ein *Effektives Potential* definieren können:

$$\boxed{U := U_z + U_G = -m_3 G \cdot \left[\frac{m_1}{|\vec{r}_{31}|} + \frac{m_2}{|\vec{r}_{32}|} \right] - \frac{m\omega^2\rho^2}{2}}$$

Aufgabe 03

Der vor dem Stoß konstanter Anfangsdrehimpuls $\vec{L}$ des Würfels bzgl der Stoßachse $\vec{A}$ ist gegeben durch

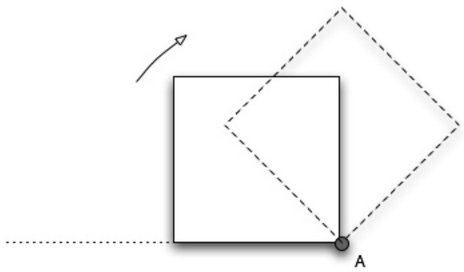
$$L = \left| \int_V \vec{r} \times \vec{v}_0 \cdot dm \right| = \int_0^{2a} \int_0^{2a} \frac{m}{4a^2} \cdot yv_0 \cdot dl \cdot dy = \int_0^{2a} \frac{mv_0 y}{2a} dy = v_0 ma,\ \vec{L} \parallel \vec{A}$$

Da es sich bei der Stoßkraft bzgl. der Achse $\vec{A}$ um eine *Axialkraft* handelt bleibt nach dem Stoß der Drehimpuls des Würfels in Richtung $\vec{A}$ erhalten. Dieser ist nach dem Stoß gegeben durch $\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$ wobei $J = J_0 + 2ma^2$ das Trägheitsmoment bzgl.

$\vec{A}$, $J_0 = \dfrac{2ma^2}{3}$ das Trägheitsmoment bzgl. der Würfelschwerpunkt-Achse[1] und $\vec{\omega} \parallel \vec{A}$ die Winkelgeschwindigkeit des jetzt um die Achse $\vec{A}$ *rotierenden* Würfels seien. Die entsprechende *Rotationsenergie* E_r bzgl. $\vec{A}$ ist gegeben durch

$$E_r = \frac{J\omega^2}{2} = \frac{L^2}{2J} = \frac{v_0^2 m^2 a^2}{2J} = \frac{3mv_0^2}{16}$$

Offensichtlich ist dann die entsprechende Translationsenergie $E_t = 0$. Damit der Würfel umkippen kann muss diese Rotationsenergie ausreichen um den Würflel mindestens um $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ rad zu drehen, bzw. den Würfel-schwerpunkt um $a \cdot (\sqrt{2} - 1)$ zu erheben.



An dieser *kritischen* Lage hat **im Grenzfall** der Würfel keinerlei Rotationsenergie mehr da diese für die Erhöhung der potentiellen Energie

$$\Delta U = mga \cdot (\sqrt{2} - 1)$$

aufgebraucht wurde. Also muss $E_r \overset{!}{>} \Delta U$ bzw.

$$\boxed{v > 4\sqrt{\frac{ga(\sqrt{2}-1)}{3}}}$$

[1]Steinersche Satz