Theoretische Mechanik
FSU Jena - SS 2007
Blatt 07 - Lösungen

Stilianos Louca

12. Juni 2007

Thema: Kepler-Problem

Aufgabe 01

a) In Polarkoordinaten ist die Beschleunigung $\ddot{\vec{r}}$ im allgemeinen darstellbar als

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) \cdot \vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}) \cdot \vec{e}_\varphi$$

wobei $F_\rho = m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)$ die *Radialkomponente* der *verantwortlichen Kraft* ist. Aufgrund der Drehimpulserhaltung gilt

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{m\rho^2}$$

wobei $L = const$ der Drehimpuls des Planeten sei. Aus der gegebenen Kurve hat man

$$\dot{\rho} = \alpha\gamma\rho^2 \sin(\gamma(\varphi - \varphi_0)) \cdot \dot{\varphi} = \alpha\gamma \sin(\gamma(\varphi - \varphi_0)) \frac{L}{m}$$

und analog

$$\ddot{\rho} = \alpha\gamma^2 \cos(\gamma(\varphi - \varphi_0)) \frac{L}{m} \cdot \dot{\varphi} = \frac{\gamma^2(1 - \beta\rho)L^2}{m^2\rho^3}$$

weshalb man schreiben kann

$$F_\rho(\rho) = m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\varphi}^2 = \frac{\gamma^2(1 - \beta\rho)L^2}{m\rho^3} - \frac{L^2}{m\rho^3} = -\frac{L^2\gamma^2\beta}{m\rho^2} + \frac{1}{\rho^3} \cdot \frac{L^2(\gamma^2 - 1)}{m}$$

b) Aufgrund der Drehimpulserhaltung $\vec{L} = const$ und der Energieerhaltung $E = const$ gilt

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{m\rho^2}, \ E = T + U = \frac{m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2)}{2} - \frac{\alpha}{(n-1)\rho^{n-1}} = const$$

Wir definieren das effektive Potential $U_e(\rho)$

$$U_e(\rho) := \frac{L^2}{2m\rho^2} - \frac{\alpha}{(n-1)\rho^{n-1}}$$

woraus sich ergibt

$$\frac{m\dot{\rho}^2}{2} = E - U_e(\rho) \geq 0$$

was bedeutet dass es nur stabile Kreisbahnen geben kann wenn U_e ein lokales Minimum besitzt so dass dort $E = U_e$ bzw. $\dot{\rho}$ stabil bei 0 sitzt. Also:

$$\partial_\rho U_e = -\frac{L^2}{m\rho^3} + \frac{\alpha}{\rho^n} \stackrel{!}{=} 0 \ \Rightarrow \ \rho^{n-3} = \frac{m\alpha}{L^2}$$

bzw.

$$\partial_\rho^2 U_e = \frac{3L^2}{m\rho^4} - \frac{n\alpha}{\rho^{n+1}} \stackrel{!}{>} 0 \ \Rightarrow \ \rho^{n-3} > \frac{n\alpha m}{3L^2}$$

woraus folgt dass $n \stackrel{!}{<} 3$

Aufgabe 02

a) Sei $\vec{L}(t)$ der Drehimpuls eines beliebigen Planeten im Zeitpunkt t und $\vec{L}_0 := \vec{L}(0)$. Dabei befinde sich der Koordinatenursprung O im Zentrum der Sonne, die aufgrund ihrer relativ großen Masse als fest angenommen werden kann.

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{r} \times \vec{F} = -\frac{\alpha\vec{r} \times \vec{r}}{r^3} - m\beta\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = -\beta \cdot \vec{L} \;\Rightarrow\; \vec{L} = \vec{L}_0 \cdot e^{-\beta t} \tag{1}$$

Der Drehimpuls ändert sich also mit der Zeit **nur um den Betrag**. Wir können also eine Ebene E definieren die senkrecht zu $\vec{L}_0$ und damit allgemein senkrecht zu $\vec{L}(t)$ liegt und durch O geht. Da $\vec{r}$ und $\dot{\vec{r}}$ immer senkrecht zu $\vec{L}$ liegen, und diese Ebene die Gesamtheit der Vektoren enthält die diese Eigenschaft haben, liegen sowohl $\vec{r}$ als auch $\dot{\vec{r}}$ für immer und ewig auf E. Jeder Planet bewegt sich also für sich auf seiner eigenen Ebene E.
Für den zeitlichen *Flächendurchlauf* auf dieser Ebene gilt:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \dot{\vec{r}}\right| = \frac{\left|\vec{L}\right|}{2m} = \frac{L_0}{2m} \cdot e^{-\beta t}$$

b) Sei o.B.d.A das Koordinatensystem S so orientiert dass $\vec{e}_z \parallel \vec{L}_0$ liegt, also $\vec{L} = L \cdot \vec{e}_z = L_0 e^{-\beta t} \cdot \vec{e}_z$, $\vec{r} = \rho \cdot \vec{e}_\rho$ und $\dot{\vec{r}} = \dot{\rho} \cdot \vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi$ wobei ρ, φ die entsprechenden Zylinder- bzw. Polarkoordinaten seien. **Bemerkung:** $\rho \cong r = |\vec{r}|$

Bilanzgleichung:

$$\frac{d}{dt}\vec{\Lambda} = \frac{\dot{p} \times \vec{L}}{m\alpha} + \frac{p \times \dot{\vec{L}}}{m\alpha} + \left\{\frac{\vec{r}}{r^2}\dot{r} - \frac{\dot{\vec{r}}}{r}\right\} = \frac{1}{m\alpha} \cdot \left[-\frac{\alpha\vec{r}}{r^3} - \beta\vec{p}\right] \times \vec{L} + \frac{p \times \dot{\vec{L}}}{m\alpha} + \left\{\frac{\vec{r}}{r^2}\dot{r} - \frac{\dot{\vec{r}}}{r}\right\}$$

$$= -\frac{2\beta}{m\alpha} \cdot \vec{p} \times \vec{L} - \frac{1}{mr^3} \cdot \vec{r} \times \vec{L} + \left\{\frac{\vec{r}}{r^2}\dot{r} - \frac{\dot{\vec{r}}}{r}\right\} = -\frac{2\beta}{m\alpha} \cdot \vec{p} \times \vec{L} - \frac{1}{r^3} \cdot (\vec{r} \cdot (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) - \dot{\vec{r}} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{r})) + \frac{(\dot{r} \cdot \vec{r}) \cdot r}{r^3} - \frac{\dot{\vec{r}}}{r}$$

$$= -\frac{2\beta}{m\alpha} \cdot \vec{p} \times \vec{L} - \frac{\vec{r} \cdot (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})}{r^3} + \frac{(\dot{r} \cdot \vec{r}) \cdot r}{r^3} = -\frac{2\beta}{m\alpha} \cdot \vec{p} \times \vec{L} - \frac{\rho^2 \cdot \vec{e}_\rho \cdot (\vec{e}_\rho \cdot (\dot{\rho} \cdot \vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi)}{\rho^3} + \frac{\rho^2(\vec{e}_\rho \cdot \dot{\rho})}{\rho^3} = -\frac{2\beta}{m\alpha} \cdot \vec{p} \times \vec{L}$$

Identitäten:

$$\dot{\vec{\Lambda}} \cdot \vec{r} = -\frac{2m\beta}{\alpha} \cdot \vec{r} \cdot (\dot{\vec{r}} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})) = -\frac{2m\beta}{\alpha} \cdot (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \cdot (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = -\frac{2\beta\vec{L}^2}{m\alpha}$$

$$\vec{\Lambda} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{m\dot{\vec{r}} \cdot (\dot{\vec{r}} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}))}{\alpha} - \frac{\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}}{r} = \frac{m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \cdot (\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}})}{\alpha} - \frac{(\dot{\rho} \cdot \vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi) \cdot \rho \cdot \vec{e}_\rho}{\rho} = -\dot{\rho} \cong -\dot{r}$$

c) Aus Gleichung 1 folgt unmittelbar dass für $\beta = 0$

$$\vec{L} = \vec{L}_0 = L_0 \cdot \vec{e}_z = const$$

gilt. Ferner folgt aus Teil (b)

$$\dot{\vec{\Lambda}} = -\frac{2\beta}{m\alpha} \cdot \vec{p} \times \vec{L} = 0 \,|_{\beta=0} \Rightarrow \;\vec{\Lambda} = const$$

Betrag von $\vec{\Lambda}$: Der Drehimpuls $\vec{L}$ ist darstellbar als

$$\vec{L} = m\rho^2\dot{\varphi} \cdot \vec{e}_z$$

weshalb der Lenzsche Vektor wie folgt dargestellt werden kann

$$\vec{\Lambda} = \frac{\dot{\vec{r}} \times \vec{L}}{\alpha} - \vec{e}_\rho = \frac{m\rho^2\dot{\varphi}}{\alpha} \cdot (\dot{\rho} \cdot \vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi) \times \vec{e}_z - \vec{e}_\rho$$

$$= \frac{m\rho^2\dot{\varphi}}{\alpha} \cdot (\rho\dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\rho - \dot{\rho} \cdot \vec{e}_\varphi) - \vec{e}_\rho = \left[\frac{m\rho^3\dot{\varphi}^2}{\alpha} - 1\right] \cdot \vec{e}_\rho - \frac{m\rho^2\dot{\rho}\dot{\varphi}}{\alpha} \cdot \vec{e}_\varphi$$

Die Exzentrizität ε der Ellipsenbahn ist gegeben durch

$$\varepsilon^2 = 1 + \frac{2Ek}{\alpha} = 1 + \frac{2}{\alpha}\cdot\left[\frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) - \frac{\alpha}{\rho}\right]\cdot\frac{L_0^2}{\alpha m} = 1 + \frac{m^2\rho^4\dot{\varphi}^2\dot{\rho}^2}{\alpha^2} + \frac{m^2\rho^6\dot{\varphi}^4}{\alpha^2} - \frac{2m\rho^3\dot{\varphi}^2}{\alpha}$$

$$k = \frac{L^2}{\alpha m},\ E = \frac{m}{2}\left|\dot{\vec{r}}\right|^2 - \frac{\alpha}{\rho}$$

wobei E die gesamte mechanische Energie des Planeten und k der Abstand von der Sonne ist für den das effektive Potential minimal wird. Glücklicherweiße ergibt sich durch einfaches Ausrechnen für $\left|\vec{\Lambda}\right|$ das gleiche:

$$\vec{\Lambda} = \left(\frac{m\rho^3\dot{\varphi}^2}{\alpha} - 1\right)\cdot\vec{e}_\rho - \frac{m\rho^2\dot{\rho}\dot{\varphi}}{\alpha}\cdot\vec{e}_\varphi \ \Rightarrow\ \left|\vec{\Lambda}\right|^2 = \left(\frac{m\rho^3\dot{\varphi}^2}{\alpha} - 1\right)^2 + \left(\frac{m\rho^2\dot{\rho}\dot{\varphi}}{\alpha}\right)^2 = \varepsilon^2$$

Richtung von $\vec{\Lambda}$: Es gilt

$$\vec{L}\cdot\vec{\Lambda} = \frac{\vec{L}\cdot(\vec{p}\times\vec{L})}{m\alpha} - \frac{\vec{L}\cdot\vec{r}}{r} = \frac{\vec{p}\cdot(\vec{L}\times\vec{L})}{m\alpha} = 0$$

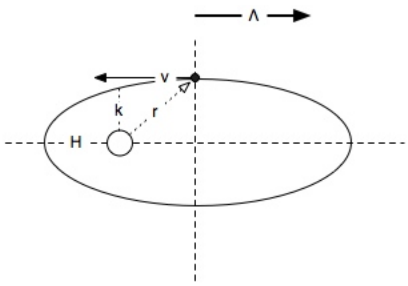
woraus man schließt dass $\vec{\Lambda}$ in der Bewegungsebene des Planeten liegt. Analog:

$$\vec{r}\cdot\vec{\Lambda} = \frac{\vec{r}\cdot(\dot{\vec{r}}\times\vec{L})}{\alpha} - \vec{r}\cdot\frac{\vec{r}}{r} = \frac{\vec{L}\cdot(\vec{r}\times\cdot\vec{r})}{\alpha} - \rho = \frac{L^2}{m\alpha} - r$$

Oberer Ausdruck verschwindet für $r = k$, wenn also die Verbindungslinie Planet-Sonne senkrecht zur Perihel-linie $\vec{H}$ steht. Dort gilt also $\vec{\Lambda}\perp\vec{r}$ also $\vec{\Lambda}\parallel\vec{H}$.

Variante: Der Ausdruck $\dot{\vec{r}}\cdot\vec{\Lambda} = -\dot{\rho}$ verschwindet genau dann wenn der Planet sich an einem der beiden Extrema (Aphel oder Perihel) befindet (also $\dot{\rho} = 0$), was bedeutet dass dort $\vec{r}\perp\dot{\vec{r}}\perp\vec{\Lambda}$ also $\vec{\Lambda}\parallel\vec{r}$.

Genauere Bestimmung der Richtung: Um die Richtung (Aphel oder Perihel) zu bestimmen betrachten wir folgende Zeichnung. Der Planet bewege sich o.B.d.A gegen den Urzeigersinn. Dies ist keine Beschränkung der Allgemeinheit da wir bei den folgenden Überlegungen auch das Bild *von hinten* betrachten könnten und so auch den anderen Umlaufsinn behandelt hätten! Betrachten wir den Fall dass $\vec{\Lambda}$ in Richtung Aphel zeigt. Dann ist das Produkt $-\dot{\vec{r}}\cdot\vec{r}$ im abgebildeten Zeitpunkt positiv jedoch das Produkt $\dot{\vec{r}}\cdot\vec{\Lambda}$ negativ! Dies ist ein Widerspruch zur vorigen Erkenntnis weshalb wir uns für die andere Richtung entscheiden müssen! □



d) **Differentialgleichung:**

Da $\vec{L} = L_0\cdot e^{-\beta t}\cdot\vec{e}_z = m\rho^2\dot{\varphi}\cdot\vec{e}_z$ folgt

$$\dot{\varphi} = \frac{L_0 e^{-\beta t}}{m\rho^2} \ \Rightarrow\ \ddot{\varphi} = -\frac{\beta L_0 e^{-\beta t}}{m\rho^2} - \frac{2L_0 e^{-\beta t}}{m\rho^3}\cdot\dot{\rho}$$

bzw.

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 = -\frac{\alpha}{m\rho^2} - \beta\dot{\rho} \ \Rightarrow\ \ddot{\rho} = \frac{L_0^2 e^{-2\beta t}}{m^2\rho^3} - \frac{\alpha}{m\rho^2} - \frac{\beta L_0 e^{-\beta t}}{m\rho^2}\cdot\frac{d\rho}{d\varphi}\quad \textit{denn}\quad \dot{\rho} = \frac{d\rho}{d\varphi}\cdot\dot{\varphi} \tag{2}$$

Aus letzterem Ausdruck folgt außerdem

$$\ddot{\rho} = \frac{d^2\rho}{d\varphi^2}\cdot\dot{\varphi}^2 + \frac{d\rho}{d\varphi}\cdot\ddot{\varphi} = \frac{d^2\rho}{d\varphi^2}\cdot\frac{L_0^2 e^{-2\beta t}}{m^2\rho^4} - \frac{d\rho}{d\varphi}\cdot\left[\frac{\beta L_0 e^{-\beta t}}{m\rho^2} + \frac{2L_0^2 e^{-2\beta t}}{m^2\rho^5}\cdot\frac{d\rho}{d\varphi}\right] \tag{3}$$

Gleichsetzen mit Gleichung 2 ergibt

$$\boxed{\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} = \rho - \frac{\alpha m \rho^2 e^{2\beta t}}{L_0^2} + \frac{2}{\rho} \cdot \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2}$$

bzw. über die Eigenschaft dass

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{d}{d\varphi}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{d}{d\varphi}\left[\frac{d\rho}{d\varphi} \cdot \frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right] = -\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} \cdot \frac{1}{\rho^2} - \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 \cdot \frac{d}{d\rho}\frac{1}{\rho^2} = -\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} \cdot \frac{1}{\rho^2} + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 \cdot \frac{2}{\rho^3}$$

äquivalenter Ausdruck

$$\boxed{\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho} = \frac{\alpha m e^{2\beta t}}{L_0^2}}$$