Übungen zur Theoretischen Mechanik – SS 2007

Blatt 7 – Abgabetermin 8.6.07

Thema: Kepler-Problem

Aufg. 1

In der Allgemeinen Relativitätstheorie ist die Bahnkurve eines Massenpunktes um einen Zentralkörper gegeben durch Rosettenbahnen

$$\rho = \frac{1}{\alpha \cos[\gamma(\phi - \phi_0)] + \beta}\,, \qquad \gamma \neq 1 \tag{1}$$

(a) Berechnen Sie die Radialkomponente F_ρ der Kraft, die zu dieser Bewegung im Rahmen der Newtonschen Theorie führt, indem Sie die ρ-Abhängigkeit von F_ρ auf die Form bringen

$$F_\rho(\rho) = F_{\rho Newton} \quad + \quad \text{Zusatzterm} \tag{2}$$

(b) Für welche n sind bei der Zentralkraft

$$\vec{F} = -\frac{\alpha \vec{r}}{r^{n+1}} \tag{3}$$

stabile Kreisbahnen möglich? $n \in \mathbb{R}$ ist konstant.

Aufg. 2

Im Endstadium der Sternentwicklung vergrößert die Sonne ihren Radius und Sonnenmaterie erreicht die Planetenbahnen. Modellieren Sie dieses Szenario durch einen zusätzlichen Stokeschen Reibungsterm $-\beta m\dot{\vec{r}} = -\beta\vec{p}$ in der Newtonschen Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{\alpha \vec{r}}{r^3} - \beta \vec{p} \tag{4}$$

(a) Beweisen Sie, dass auch im Fall $\beta \neq 0$ die Bewegung des Planeten in einer Ebene erfolgt, die fest (zeitunabhängig) ist und formulieren Sie die zugehörige Verallgemeinerung des Flächensatzes!

(b) Ermitteln Sie für den Fall $\beta \geq 0$ eine Bilanzgleichung für den Lenzschen Vektor

$$\vec{\Lambda} = \frac{\vec{p} \times \vec{L}}{m\alpha} - \frac{\vec{r}}{r} \tag{5}$$

und beweisen Sie die Beziehungen

$$\dot{\vec{\Lambda}}\vec{r} = -\frac{2\beta}{m\alpha}\vec{L}^2, \quad \text{sowie} \tag{6}$$

$$\vec{\Lambda}\dot{\vec{r}} = -\dot{r}. \tag{7}$$

(c) Beweisen Sie für $\beta = 0$ die Beziehungen

$$\vec{\Lambda} = const_1, \quad \text{sowie} \quad \vec{L} = const_2 \tag{8}$$

und zeigen Sie, dass für diesen Spezialfall $\vec{\Lambda}$ vom Kraftzentrum zum Perihel zeigt und $\left|\vec{\Lambda}\right|$ gleich der Exzentrizität der von der Planentenbahn beschriebenen Ellipse ist!

(d) Kehren Sie zum allgemeinen Fall zurück ($\beta \neq 0$). Ermitteln Sie die Differentialgleichung für $\rho = \rho(\phi)$, wobei (ρ, ϕ, z) ebene Polarkoordinaten sind!

Hinweis:

Legen Sie den Drehimpuls $\vec{L}$ in die z-Richtung, drücken Sie seinen (zeitabhängigen) Betrag als Funktion von ρ, ϕ und t aus und benutzen Sie die ρ-Komponente der Bewegungsgleichung!