Theoretische Mechanik
FSU Jena - SS 2007
Blatt 06 - Lösungen

Stilianos Louca

3. November 2007

Thema: Schwingungen und erzwungene Schwingungen

Aufgabe 01

Sei L ein linearer Differentialoperator definiert als: $Lu = \ddot{u} + \beta\dot{u} + \omega_0^2 u$

Definieren außerdem: $\Omega_0 := \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\beta^2}{4}}$ und $\mathcal{Q}(t) := \int_0^t G(t,\tau)K(\tau)d\tau$

Es gilt

- $$\mathcal{Q}(0) = \int_0^0 G(0,\tau)K(\tau)d\tau = 0$$

- $$\dot{\mathcal{Q}}(t) = G(t,t)K(t) + \int_0^t \frac{dG}{dt}(t,\tau)K(\tau)d\tau = \int_0^t \dot{G}(t,\tau)K(\tau)d\tau \;\Rightarrow\; \dot{\mathcal{Q}}(0) = \int_0^0 \dot{G}(t,\tau)K(\tau)d\tau = 0$$

- $$\ddot{\mathcal{Q}} = \dot{G}(t,t)K(t) + \int_0^t \ddot{G}(t,\tau)K(\tau)d\tau = K(t) + \int_0^t \ddot{G}(t,\tau)K(\tau)d\tau$$

Teil (a)

Beweis durch einsetzen:

$$x(0) = x_H(0) + \mathcal{Q}(0) = e^0 \cdot [0 + x_0\cos(0)] + 0 = x_0$$

$$\dot{x}_H = e^{-\frac{\beta}{2}t} \cdot \left[\left(v_0 + \frac{\beta}{2}x_0\right)\cos t\Omega_0 - x_0\Omega_0\sin t\Omega_0 - \frac{\beta}{2}\cdot\left(\frac{v_0 + \frac{\beta}{2}x_0}{\Omega_0}\sin t\Omega_0 + x_0\cos t\Omega_0\right)\right]$$

$$= e^{-\frac{\beta}{2}t} \cdot \left[v_0\cos t\Omega_0 - \sin t\Omega_0 \cdot \frac{4x_0\Omega_0^2 + 2\beta v_0 + \beta^2 x_0}{4\Omega_0}\right]$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_H(0) + \dot{\mathcal{Q}}(0) = e^0 \cdot [v_0\cos 0 + 0] + 0 = v_0$$

$$\ddot{x}_H = e^{-\frac{\beta}{2}t} \cdot \left[\sin t\Omega_0 \cdot \frac{\beta(4x_0\Omega_0^2 + 2\beta v_0 + \beta^2 x_0) - 8v_0\Omega_0^2}{8\Omega_0} - \cos t\Omega_0 \cdot \frac{4x_0\Omega_0^2 + 4\beta v_0 + \beta^2 x_0}{4}\right]$$

Einsetzen in die Gleichung ergibt:

$$Lx = \ddot{x}_h + \beta\dot{x}_h + \omega_0^2 x_h + \ddot{\mathcal{Q}} + \beta\dot{\mathcal{Q}} + \omega_0^2\mathcal{Q}$$

$$= 0 \cdot \cos\Omega_0 t + 0 \sin\Omega_0 t + K(t) + \int_0^t \left\{\ddot{G}(t,\tau) + \beta\dot{G}(t,\tau) + G(t,\tau)\right\} K(\tau) d\tau \stackrel{!}{=} K(t)$$

Da die DGL

$$\ddot{G}(t,\tau) + \beta\dot{G}(t,\tau) + G(t,\tau) = 0$$

allgemein lösbar ist (siehe Teil (b)) so ist auch das AWP gelöst sobald man das entsprechende $G(t,\tau)$ bestimmt hat denn dann ist

$$Lx = K(t)$$

Teil (b)

Da $\mathcal{Q}$ die Gleichung $L\mathcal{Q} = K(t)$ löst, muss

$$\ddot{\mathcal{Q}} + \beta\dot{\mathcal{Q}} + \omega_0^2\mathcal{Q} = K(t) + \int_0^t \left\{\ddot{G}(t,\tau) + \beta\dot{G}(t,\tau) + G(t,\tau)\right\} K(\tau) d\tau = K(t)$$

Da t bzw. $K()$ beliebig sein kann, folgt die Gleichung

$$\ddot{G}(t,\tau) + \beta\dot{G}(t,\tau) + G(t,\tau) = 0$$

die unter dem Ansatz

$$G(t,\tau) = \Gamma e^{-\frac{\beta}{2}(t-\tau)} \cdot \sin\left(\Omega_0(t-\tau) + \varphi\right)$$

gelöst werden kann. Aus dem AWP folgt

$$G(\tau,\tau) = \Gamma \cdot \sin(\varphi) \stackrel{!}{=} 0 \;\Rightarrow\; \varphi = 0$$

und

$$\dot{G}(\tau,\tau) = \Gamma \cdot \left\{-\frac{\beta}{2}\sin 0 + \Omega_0 \cos 0\right\} = 1 \;\Rightarrow\; \Gamma = \frac{1}{\Omega_0}$$

bzw.

$$\boxed{G(t,\tau) = \frac{e^{-\frac{\beta}{2}(t-\tau)} \cdot \sin(\Omega_0(t-\tau))}{\Omega_0}}$$

Teil (c)

Die Lösung der DGL $\ddot{x} + \beta\dot{x} + \omega_0^2 x = K(t)$ ergibt sich aus

$$x(t) = x_h(t) + \mathcal{Q}(t)$$

wobei man durch den Ansatz $x(t) = e^{\lambda t}$ auf folgende allgemeine Lösung der homogenen Gleichung kommt

$$x_h(t) = \Phi \cdot e^{-\frac{\beta}{2}t} \cdot \sin(\Omega_0 t + \alpha),\;\; \Phi, \alpha : const$$

Außerdem ist

$$\mathcal{Q}(0) = 0 \;\Rightarrow\; x(0) = x_h(0) = \Phi \sin\alpha \stackrel{!}{=} 0 \;\Rightarrow\; \alpha = 0$$

und

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_h(0) + \dot{\mathcal{Q}}(0) = \frac{\Phi}{\Omega_0} \stackrel{!}{=} 0 \;\Rightarrow \Phi = 0$$

also

$$x(t) = \mathcal{Q}(t)$$

Für $t \in [0, A/\Omega]$ gilt

$$\mathcal{Q}(t) = \int_0^t G(t,\tau)K(\tau)d\tau = \frac{1}{4i\Omega_0} \cdot \int_0^t \left\{ e^{(t-\tau)\left(i\Omega_0 - \frac{\beta}{2}\right)} - e^{-(t-\tau)\left(i\Omega_0 + \frac{\beta}{2}\right)} \right\} \cdot \left\{ e^{i\Omega\tau} + e^{-i\Omega\tau} \right\} d\tau$$

$$= \frac{K_0}{4i\Omega_0} \cdot \int_0^t \left\{ e^{t\left(i\Omega_0 - \frac{\beta}{2}\right)} \cdot \left[e^{\tau\left(\frac{\beta}{2} - i\Omega_0 + i\Omega\right)} + e^{\tau\left(\frac{\beta}{2} - i\Omega_0 - i\Omega t\right)} \right] - e^{-t\left(i\Omega_0 + \frac{\beta}{2}\right)} \cdot \left[e^{\tau\left(i\Omega + i\Omega_0 + \frac{\beta}{2}\right)} + e^{\tau\left(i\Omega_0 + \frac{\beta}{2} - i\Omega\right)} \right] \right\} d\tau$$

$$= \frac{K_0 e^{-\frac{\beta}{2}t}}{4i\Omega_0} \cdot \left\{ e^{i\Omega_0 t} \left[\frac{e^{t\left(\frac{\beta}{2} + i(\Omega - \Omega_0)\right)} - 1}{\frac{\beta}{2} + i(\Omega - \Omega_0)} + \frac{e^{t\left(\frac{\beta}{2} - i(\Omega_0 + \Omega)\right)} - 1}{\frac{\beta}{2} - i(\Omega_0 + \Omega)} \right] - e^{-i\Omega_0 t} \left[\frac{e^{t\left(\frac{\beta}{2} + i(\Omega_0 + \Omega)\right)} - 1}{\frac{\beta}{2} + i(\Omega_0 + \Omega)} + \frac{e^{t\left(\frac{\beta}{2} + i(\Omega_0 - \Omega)\right)} - 1}{\frac{\beta}{2} + i(\Omega_0 - \Omega)} \right] \right\}$$

$$= \frac{K_0}{4i\Omega_0} \cdot \left\{ \frac{e^{i\Omega t}}{\frac{\beta}{2} + i(\Omega - \Omega_0)} + \frac{e^{-i\Omega t}}{\frac{\beta}{2} - i(\Omega_0 + \Omega)} + \frac{-e^{i\Omega t}}{\frac{\beta}{2} + i(\Omega_0 + \Omega)} + \frac{-e^{-i\Omega t}}{\frac{\beta}{2} - i(\Omega - \Omega_0)} \right\}$$

$$- \frac{K_0 e^{-\frac{\beta}{2}t}}{4i\Omega_0} \cdot \left\{ \frac{e^{i\Omega_0 t}}{\frac{\beta}{2} + i(\Omega - \Omega_0)} + \frac{e^{i\Omega_0 t}}{\frac{\beta}{2} - i(\Omega_0 + \Omega)} + \frac{-e^{-i\Omega_0 t}}{\frac{\beta}{2} + i(\Omega_0 + \Omega)} + \frac{-e^{-i\Omega_0 t}}{\frac{\beta}{2} - i(\Omega - \Omega_0)} \right\}$$

$$= \frac{K_0}{4\Omega_0} \cdot \left\{ \frac{2(\Omega_0 + \Omega)\cos\Omega t - \beta\sin\Omega t}{\frac{\beta^2}{4} + (\Omega_0 + \Omega)^2} + \frac{2(\Omega_0 - \Omega)\cos\Omega t + \beta\sin\Omega t}{\frac{\beta^2}{4} + (\Omega_0 - \Omega)^2} \right\}$$

$$- \frac{K_0 e^{-\frac{\beta}{2}t}}{4\Omega_0} \cdot \left\{ \frac{2(\Omega_0 + \Omega)\cos\Omega_0 t + \beta\sin\Omega_0 t}{\frac{\beta^2}{4} + (\Omega_0 + \Omega)^2} + \frac{2(\Omega_0 - \Omega)\cos\Omega_0 t + \beta\sin\Omega_0 t}{\frac{\beta^2}{4} + (\Omega_0 - \Omega)^2} \right\}$$

Für $t \geq A/\Omega =: T$ gilt

$$\mathcal{Q}(t) = \int_0^T G(t,\tau)K(\tau)d\tau + \int_T^t G(t,\tau)K(\tau)d\tau = \int_0^T G(t,\tau)K(\tau)d\tau$$

Analog zur vorhin ergibt sich durch einfaches Ersetzen der Integrationsgrenze t durch T:

$$\mathcal{Q}(t) = \frac{K_0 e^{-\frac{\beta}{2}t}}{4i\Omega_0} \cdot \left[\mathcal{N} \cdot e^{i\Omega_0 t} + \mathcal{M} \cdot e^{-i\Omega_0 t} \right]$$

wobei

$$\mathcal{N} = \frac{e^{T\left(\frac{\beta}{2} + i(\Omega - \Omega_0)\right)} - 1}{\frac{\beta}{2} + i(\Omega - \Omega_0)} + \frac{e^{T\left(\frac{\beta}{2} - i(\Omega_0 + \Omega)\right)} - 1}{\frac{\beta}{2} - i(\Omega_0 + \Omega)} = const$$

und

$$\mathcal{M} = -\frac{e^{T\left(\frac{\beta}{2} + i(\Omega_0 + \Omega)\right)} - 1}{\frac{\beta}{2} + i(\Omega_0 + \Omega)} - \frac{e^{T\left(\frac{\beta}{2} + i(\Omega_0 - \Omega)\right)} - 1}{\frac{\beta}{2} + i(\Omega_0 - \Omega)} = const$$

Bemerkungen: Man kann erkennen dass sich im Falle $t \leq T$ die Schwingung aus einer *mit der Zeit verschwindenden* Schwingung der Kreisfrequenz Ω_0 (zweiter Teil des Ausdrucks) und einer Schwingung konstanter Amplitude und der Kreisfrequent Ω (Erregerfrequenz) (erster Teil des Ausdrucks) zusammensetzt. Im Fall $t > T$, also nach Beendung der Erregung schwingt das System nur noch mit der Eigenfrequenz Ω_0 und zwar mit einer *verschwindenden Amplitude* weiter!

Teil (c) - Fouriertransformierte

Die Kraft $K(t)$ kann wie folgt dargestellt werden

$$K(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

wobei

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} K(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{A/\Omega} K(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$= \frac{K_0}{2\pi} \cdot \int_0^{A/\Omega} \cos(\Omega t) \cdot (\cos\omega t - i\sin\omega t) dt$$

$$= \frac{K_0}{4\pi} \cdot \int_0^{A/\Omega} \{\cos((\Omega-\omega)t) + \cos((\Omega+\omega)t) + i\sin((\Omega-\omega)t) - i\sin((\Omega+\omega)t)\}\, dt$$

$$= \frac{K_0}{4\pi} \cdot \left\{ \frac{\sin(\Omega-\omega)t}{\Omega-\omega} + \frac{\sin(\Omega+\omega)t}{\Omega+\omega} - \frac{i\cos(\Omega-\omega)t}{\Omega-\omega} + \frac{i\cos(\Omega+\omega)t}{\Omega+\omega} \right\}_0^{A/\Omega}$$

$$= \frac{K_0}{4\pi} \cdot \left\{ \frac{\sin\gamma_\omega}{\Omega-\omega} + \frac{\sin\delta_\omega}{\Omega+\omega} - \frac{i\cos\gamma_\omega}{\Omega-\omega} + \frac{i\cos\delta_\omega}{\Omega+\omega} + \frac{2i\omega}{\Omega^2-\omega^2} \right\},\ \gamma_\omega := \frac{A(\Omega-\omega)}{\Omega},\ \delta_\omega := \frac{A(\Omega+\omega)}{\Omega},\ |\omega| \neq \Omega$$

$$f(\omega)e^{i\omega t} + f(-\omega)e^{-i\omega t} = f(\omega)\cdot(\cos\omega t + i\sin\omega t) + f(-\omega)\cdot(\cos\omega t - i\sin\omega t) = \frac{K_0}{4\pi}\cdot\{\Delta_\omega \cdot \cos\omega t \cdot + \Gamma_\omega \cdot \sin\omega t\}$$

$$wobei: \Gamma_\omega := \frac{2\cos\gamma_\omega}{\Omega-\omega} - \frac{2\cos\delta_\omega}{\Omega+\omega} - \frac{4\omega}{\Omega^2-\omega^2},\quad \Delta_\omega := \frac{2\sin\gamma_\omega}{\Omega-\omega} + \frac{2\sin\delta_\omega}{\Omega+\omega}$$

$$\underline{Für\ \ |\omega| = \Omega:}\ f(\Omega) = \frac{K_0}{4\pi} \cdot \int_0^{A/\Omega} \{1 + \cos 2\Omega t - i\sin 2\Omega t\}\, dt = \frac{K_0}{4\pi} \cdot \left\{ t + \frac{\sin 2\Omega t}{2\Omega} + \frac{i\cos 2\Omega t}{2\Omega} \right\}_0^{A/\Omega}$$

$$= \frac{K_0}{4\pi\Omega} \cdot \left\{ A + \frac{\sin 2A}{2} + \frac{i\cos 2A}{2} - \frac{i}{2} \right\},\quad Analog:\ f(-\Omega) = \frac{K_0}{4\pi\Omega} \cdot \left\{ A + \frac{\sin 2A}{2} - \frac{i\cos 2A}{2} + \frac{i}{2} \right\}$$

$$f(\Omega)e^{i\Omega t} + f(-\Omega)e^{-i\Omega t} = \frac{K_0}{4\pi\Omega} \cdot \{(2A + \sin 2A)\cos\Omega t + (1 - \cos 2A)\cdot\sin\Omega t\} = \lim_{\omega\to\Omega} f(\omega)e^{i\omega t} + f(-\omega)e^{-i\omega t}$$

Also

$$K(t) = \int_0^{\infty} \left\{ f(\omega)e^{i\omega t} + f(-\omega)e^{-i\omega t} \right\} d\omega = \frac{K_0}{4\pi} \cdot \int_0^{\infty} \{\Delta_\omega \cdot \cos\omega t + \Gamma_\omega \cdot \sin\omega t\}\, d\omega$$

$$= \frac{K_0}{4\pi} \cdot \int_0^{\infty} \sqrt{\Delta_\omega^2 + \Gamma_\omega^2} \cdot \cos(\omega t + \varphi_\omega) d\omega,\quad \varphi_\omega = \arctan\left(\frac{\Gamma_\omega}{\Delta_\omega}\right)$$

Die Lösung der DGL $\ddot{x} + \beta\dot{x} + \omega_0^2 x = K(t)$ ergibt sich aus

$$\boxed{x(t) = x_h(t) + x_p(t)}$$

wobei

$$\boxed{x_h(t) = \Phi \cdot e^{-\frac{\beta}{2}t} \cdot \cos(\Omega_0 t + \alpha),\ \Phi, \alpha : const}$$

und

$$\boxed{x_p(t) = \frac{K_0}{4\pi} \cdot \int_0^{\infty} \Theta_\omega \cdot \cos(\omega t + \vartheta_\omega)\ d\omega,\ \Theta_\omega = \frac{\sqrt{\Delta_\omega^2 + \Gamma_\omega^2}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\beta\omega)^2}},\ \vartheta_\omega = \arctan\left(\frac{\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}\right) + \arctan\left(\frac{\Gamma_\omega}{\Delta_\omega}\right)}$$

Letzteres ist eindeutig bestimmt und die einzigen freien Parameter sind α und Φ!
Das AWP wird gelöst durch

$$0 = x(0) = \Phi\cos\alpha + \frac{K}{4\pi}\cdot\int_0^\infty \Theta_\omega \cos\vartheta_\omega d\omega \ \wedge\ 0 = \dot{x}(0) = -\Phi\cdot\left\{\frac{\beta}{2}\cos\alpha + \Omega_0\sin\alpha\right\} - \frac{K}{4\pi}\int_0^\infty \omega\Theta_\omega\sin\vartheta_\omega d\omega$$

weshalb folgt

$$\boxed{\Phi = \sqrt{\left(\frac{\Lambda\beta - 2\eta}{2\Omega_0}\right)^2 + \Lambda^2},\ \alpha = -\frac{\Lambda}{\Phi}}$$

wobei

$$\Lambda := \frac{K}{4\pi}\cdot\int_0^\infty \Theta_\omega\cos\vartheta_\omega d\omega = x_p(0),\ \eta := \frac{K}{4\pi}\int_0^\infty \omega\Theta_\omega\sin\vartheta_\omega d\omega = \dot{x}_p(0)$$

Aufgabe 02

a) Sei r jeweils der Abstand vom Erdmittelpunkt. Ohne Reibung wirkt auf den Stein eine der Entfernung r proportionale Kraft

$$F(r) = -\frac{GmM}{r^2}\cdot\frac{r^3}{R^3} \ \Rightarrow\ \ddot{r} = -\omega_0^2\cdot r,\ \ \omega_0^2 := \frac{GM}{R^3} = const$$

in Richtung Zentrum. Bekanntlich stellt diese Gleichung die Bewegungsgleichung einer harmonischen Schwingung um den Erdmittelpunkt (r=0) dar, deren Lösung die folgende ist

$$r(t) = \mathcal{R}\cdot\sin(\omega_0 t + \varphi),\ \mathcal{R},\varphi : const$$

Einsetzen in die DGL zeigt das dies tatsächlich die Lösung ist! $\mathcal{R}$ und φ stellen hier jeweils die Amplitude und die Anfangsphase dar, wobei $\omega_0 = \sqrt{\frac{GM}{R^3}} = \sqrt{\frac{g}{R}}$ die entsprechende Kreisfrequenz ist und $g \approx 10\ m\cdot s^{-2}$ die Erdbeschleunigung an deren Oberfläche. Für das AWP $r(0) = R,\ \dot{r}(0) = 0$ ergibt sich:

$$\dot{r}(0) = \omega_0\mathcal{R}\cos(\varphi) = 0 \ \wedge\ r(0) = \mathcal{R}\sin(\varphi) = R \ \Rightarrow\ \varphi = \frac{\pi}{2} \ \wedge\ \mathcal{R} = R$$

also

$$\boxed{r(t) = R\cos(\omega_0 t)}$$

b) Sei τ diese gesuchte Zeit, dann gilt

$$r(\tau) = R\cos(\omega_0\tau) = -R \ \Rightarrow\ \tau = \frac{\arccos(-1)}{\omega_0} = \frac{\pi}{\omega_0} = \pi\sqrt{\frac{R}{g}} \approx 300\cdot\sqrt{50} \approx 2100'' = 35'$$

c) Bei einer Geschwindigkeit $\dot{r}$ erfährt der Stein die Reibungskraft $F_r = -2m\alpha\dot{r},\ \alpha : const$ weshalb die Gleichung jetzt lautet:

$$\ddot{r} + 2\alpha\dot{r} + \omega_0^2 r = 0$$

Durch den Ansatz $r(t) = C\cdot e^{\lambda t}$ bekommt man die *charakteristische Gleichung*

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0 \ \Rightarrow\ \lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

Fall 1: $\alpha < \omega_0$ **:** Durch setzen von $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ kommt man auf

$$r(t) = e^{-\alpha t}\cdot\left[C_1\cdot e^{i\Omega t} + C_2\cdot e^{-i\Omega t}\right] = \mathcal{R}\cdot e^{-\alpha t}\cdot\sin(\Omega t + \varphi),\ \mathcal{R},\varphi,C_1,C_2 : const$$

und durch das AWP auf

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\Omega}{\alpha}\right) = \arctan\left(\sqrt{\frac{\omega_0^2}{\alpha^2} - 1}\right) = \arctan\left(\sqrt{\frac{g}{R\alpha^2} - 1}\right),\ \mathcal{R} = \frac{R_0\sqrt{\Omega^2 + \alpha^2}}{\Omega} = \frac{R_0\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}} = R_0\sqrt{\frac{g}{g - R\alpha^2}}$$

Fall 2 : $\alpha = \omega_0$: Durch *Variation der Konstanten* kommt man auf

$$r(t) = e^{-\alpha t}(C_1 + tC_2)$$

und durch das AWP auf

$$C_1 = R_0,\ C_2 = \alpha R_0$$

Fall 3 : $\alpha > \omega_0$: Es folgt analog zum Fall (1) :

$$r(t) = e^{-\alpha t} \cdot \left[C_1 e^{\Omega t} + C_2 e^{-\Omega t}\right] = \mathcal{R} \cdot e^{-\alpha t} \cdot \cosh(\Omega t + \varphi), \quad \mathcal{R}, \varphi, C_1, C_2 : const$$

und durch das AWP

$$\varphi = \operatorname{arctanh}\left(\frac{\alpha}{\Omega}\right) = \operatorname{arctanh}\left(\alpha \cdot \sqrt{\frac{R}{g - R\alpha^2}}\right),\ \mathcal{R} = 2R_0\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{\Omega^2}} = 2R_0\sqrt{\frac{g - 2R_0\alpha^2}{g - R_0\alpha^2}}, \quad (R_0 = R) \quad \square$$