

# Übungen zur Theoretischen Mechanik – SS 2007

Blatt 5 – Abgabetermin 1.6.07

## Thema: Schwingungen und erzwungene Schwingungen

### Aufg. 1

Gegeben ist ein gedämpfter harmonischer Oszillator mit äußerer nichtperiodischer treibender Kraft  $K(t)$ ,

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \beta \dot{x} = K(t).$$

- (a) Beweisen Sie, daß das Anfangswertproblem

$$x(t=0) = x_0, \quad \dot{x}(t=0) = v_0,$$

gelöst wird durch

$$x(t) = x_H(t) + \int_0^t G(t, \tau) K(\tau) d\tau,$$

wobei

$$G(\tau, \tau) = 0, \quad \frac{dG}{dt}(\tau, \tau) = 1,$$

und

$$x_H(t) = e^{-\frac{\beta}{2}t} \left( \frac{v_0 + \frac{\beta}{2}x_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\beta^2}{4}}} \sin \left[ t \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\beta^2}{4}} \right] + x_0 \cos \left[ t \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\beta^2}{4}} \right] \right).$$

- (b) Bestimmen Sie die Zweipunktfunktion (Greensche Funktion)  $G(t, \tau)$  mit den Bedingungen

$$G(\tau, \tau) = 0, \quad \dot{G}(t = \tau, \tau) = 1,$$

für dieses Problem.

- (c) Es sei nun

$$K(t) = K_0 \cos(\Omega t) \quad \text{für } 0 \leq \Omega t \leq A,$$

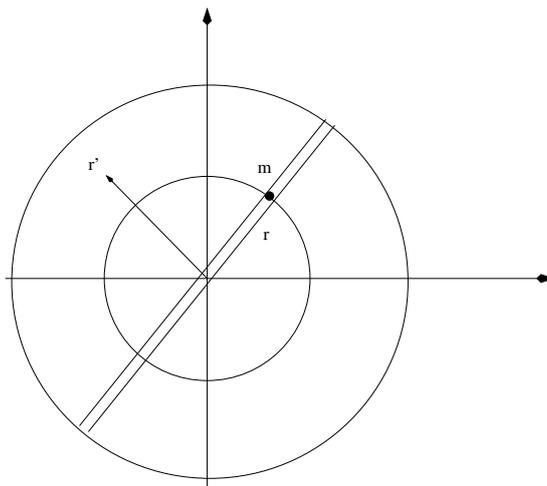
und 0 sonst (Modell für eine Marschkolonne auf einer Brücke).

Bestimmen Sie für diese treibende Kraft und die Anfangsbedingung  $x_0 = v_0 = 0$  die Schwingungen  $x(t)$  der Brücke und die zugehörige Fouriertransformierte!

Interpretieren Sie die Ergebnisse!

### Aufg. 2

Nehmen Sie an, es bestünde ein sehr dünner und senkrechter Schacht, der durch den Erdmittelpunkt bis an die gegenüberliegende Seite der Erde (Masse  $M$ , Radius  $R$ ) führt. Im Abstand  $r$  vom Erdmittelpunkt erfährt ein Stein mit der Masse  $m$  eine Kraft  $F(r) = -\gamma m M(r) r^{-2}$  in Richtung Erdmittelpunkt, wobei  $M(r)$  die Masse "unterhalb von  $r$ " ist, d.h. die Masse einer Kugel mit konstanter Dichte  $\rho_0$  und dem Radius  $r$  (siehe Abbildung).



Hinweis: Die Massen für  $r' \geq r$  beeinflussen den Stein nicht, Schalen produzieren innen kein Gravitationsfeld.

- Zeigen Sie, daß ein Stein, der mit der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  in den Schacht fällt, harmonische Schwingungen ausführt und bestimmen Sie die Kreisfrequenz  $\omega$ !
- Wieviel Minuten dauert es, bis der frei fallende Stein das gegenüberliegende Ende des Schachts erreicht ( $\pi \approx 3$ ,  $R \approx 5000\text{km}$ ).
- Der Luftwiderstand im Schacht soll nun durch eine lineare Reibungskraft modelliert werden. Lösen Sie für diesen Fall das Anfangswertproblem

$$r(t=0) = R_0 = 5000\text{km}, \quad v(t=0) = 0.$$