Theoretische Mechanik
FSU Jena - SS 2007
Blatt 05 - Lösungen

Stilianos Louca

29. Mai 2007

Thema: Bilanzgleichungen und Erhaltungssätze

Aufgabe 01

Definieren: $F := qE_0,\ A := \pi R^2,\ a := A \cdot \rho$.
Nennen: Als *Objekt* wollen wir die Gesamtheit Kugel & eingesammelten Staub bezeichnen.
Sei außerdem m_0 die Masse der Kugel und o.B.d.A : $x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 0$. Dann gilt für die gesamte Masse m des Objekts nach einer bestimmten Strecke x:

$$m(x) = \pi R^2 \cdot \rho_0 \cdot x + m_0 = ax + m_0 \tag{1}$$

Nach einer Zeit t hat das Objekt den Impuls

$$p = Ft = m \cdot \dot{x} = (ax + m_0)\dot{x} \tag{2}$$

und es gilt allgemein

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(m\dot{x})}{dt} = m\ddot{x} + \dot{x}\dot{m} = m\ddot{x} + \dot{x}^2 a = const \tag{3}$$

Aus Gl. 2 folgt

$$Ft = \frac{d(\frac{a}{2}x^2 + m_0 x)}{dt} \ \Rightarrow\ ax^2 + 2m_0 x = 2F \cdot \int_0^t u\ du = Ft^2$$

bzw. durch umstellen und dem Gedanken dass $x \geq 0\ \forall\ t$

$$\boxed{x = \frac{\sqrt{m_0^2 + aFt^2} - m_0}{a}}$$

und durch ableiten

$$\boxed{\dot{x} = \frac{Ft}{\sqrt{m_0^2 + aFt^2}}, \quad \lim_{t\to\infty} \dot{x} = \sqrt{\frac{F}{a}}}$$

weshalb für die Masse aus Gl. 1 folgt

$$\boxed{m = \sqrt{m_0^2 + aFt^2}}$$

Grenzwert von $\dot{x}$ - Variante

Aus Gl. 3 folgt

$$\ddot{x} = \frac{F}{ax + m_0} - \frac{\dot{x}^2 a}{ax + m_0} \tag{4}$$

Außerdem gilt für die kinetische Energie T des Objekts stets

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2} \leq Fx$$

da aus der gesamt geleisteten Arbeit Fx aufgrund der *unelastischen Stöße* mit den Staubpartikeln stets etwas verloren geht. Aus Gl. 4 ergibt sich also

$$\frac{F}{ax+m_0} \geq \ddot{x} \geq \frac{F}{ax+m_0} - \frac{2aFx}{(ax+m_0)^2} \tag{5}$$

Es ist ersichtlich das $\dot{x} \geq 0 \ \forall t$ also $x(t) \geq 0$ monoton wachsend.
Wir wollen zeigen dass $\dot{x}$ für $t \to \infty$ einen Grenzwert hat.
Fall 1: x ist nach oben Beschränkt, hat also einen Grenzwert (Asymptote). Dann gilt dort $\dot{x} = 0 \ \rightarrow \ \ddot{x} \geq 0$ und da es ein Grenzwert ist gilt auch $\ddot{x} \leq 0 \ \rightarrow \ \ddot{x} = 0$, das Objekt bleibt also quasi still. Dann ist auch $\lim\limits_{t\to\infty} \dot{x} = 0$. Wir werden jedoch gleich sehen das der tatsächliche Grenzwert ein anderer ist, das Objekt also auch nie stehen bleibt.
Fall 2: x ist nicht nach oben beschränkt, also $x \to \infty$. Nach Abschätzung 5 gilt $\lim\limits_{x\to\infty} \ddot{x} = 0$. Also

$$\lim_{t\to\infty} \dot{x} = \lim_{x\to\infty} \dot{x} = \lim_{\ddot{x}\to 0} \dot{x} \overset{(4)}{=} \sqrt{\frac{F}{a}} \quad \square$$

Aufgabe 02

Da die Kraft $\vec{F}$ eine Zentralkraft ist, bewirkt diese keine Änderung des Drehimpulses $\vec{L} = m\rho^2\dot{\varphi} \cdot \vec{e}_z$ wobei ρ der Abstand der Masse m vom Loch sei. Also:

$$\rho^2\dot{\varphi} = Rv_0 =: h_0 = const \ \Rightarrow \ \dot{\varphi} = \frac{h_0}{\rho^2}$$

Die Masse m hat am Anfang die kinetische Energie

$$T_0 = \frac{m}{2}v_0^2$$

Bei einem Abfall der Masse M nach unten um die Strecke $R - \rho$, also einer geleisteten Arbeit $W = F \cdot (R - \rho)$, ändert sich die kinetische Energie der beiden Massen entsprechend:

$$T = T_0 + F \cdot (R-\rho) = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) + \frac{M}{2}\dot{\rho}^2 \ \Rightarrow \ \frac{(m+M)}{2}\dot{\rho}^2 + U(\rho) = T_0, \ U(\rho) := \frac{mh_0^2}{2\rho^2} - F(R-\rho)$$

Bei Extremwerten von ρ gilt $\dot{\rho} = 0$ also

$$T_0 - U(\rho) = T_0 + F(R-\rho) - \frac{mh_0^2}{2\rho^2} = 0 \ \Rightarrow \ -2F\cdot\rho^3 + 2(T_0 + FR)\cdot\rho^2 - mh_0^2 = 0$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind gegeben durch

$$\rho_{1,2} = \frac{mv_0^2 \pm v_0\sqrt{m^2v_0^2 + 8FmR}}{4F}, \ \rho_3 = R$$

$\rho_2 < 0$ ist offensichtlich kein Extremwert und ρ_1 und R jeweils der maximale oder minimale Abstand vom Ursprung (je nach Anfangsbedingungen). Die Kraft F überlagert sich mit der *Zentrifugalkraft* $\dot{\varphi}^2\rho m$ und bewirkt eine *radiale* Beschleunigung $\ddot{\rho}\cdot\vec{e}_\rho$ der Masse m

$$\ddot{\rho} = \frac{m\rho\dot{\varphi}^2 - F}{m+M}$$

Damit sich die Masse auf einer Kreisbahn bewegt, also $\rho = R$ bzw. $\ddot{\rho} = 0 \ \forall t$, muss gelten

$$m\rho\dot{\varphi}^2 = \frac{mh_0^2}{\rho^3} = F$$

also

$$v_0 = \sqrt{\frac{RF}{m}}$$

Aufgabe 03

Der Stein befinde sich im Zeitpunkt $t = 0$ im Koordinatenursprung.

Nach dem Stokeschen Gesetz ist der auf den Stein wirkende Luftwiderstand $\vec{F}$ gegeben durch $\frac{\vec{F}}{m} = -\alpha \cdot \dot{\vec{r}},\ \alpha = const > 0$ wobei m seine Masse sei. Also:

$$\ddot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \cdot \dot{x} \\ -g - \alpha \dot{z} \end{pmatrix}$$

$$\int_{v_{0x}}^{v_x} \frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -\int_0^t a\ du = -at \ \Rightarrow\ v_x(t) = v_{0x} \cdot e^{-at} \ \Rightarrow\ x(t) = \int_0^t v_{0x} \cdot e^{-at} dt = \frac{v_{0x}}{a} \cdot \left(1 - e^{-at}\right)$$

$$Analog: \ v_z(t) = v_{0z} e^{-at} + \frac{g}{a} \cdot \left(e^{-at} - 1\right) \ \Rightarrow\ z(t) = \int_0^t v_z(u) \cdot du = \left(1 - e^{-at}\right) \cdot \left(\frac{v_{0z}}{a} + \frac{g}{a^2}\right) - \frac{g}{a} t$$

$$\Rightarrow\ \vec{r} = \frac{1}{a} \cdot \begin{pmatrix} v_{0x} \cdot (1 - e^{-at}) \\ (1 - e^{-at}) \cdot \left(v_{0z} + \frac{g}{a}\right) - gt \end{pmatrix} \ \wedge\ z(x) = \frac{x}{v_{0x}} \cdot \left(v_{0z} + \frac{g}{a}\right) + \frac{g}{a^2} \cdot \ln\left|1 - \frac{ax}{v_{0x}}\right|$$

Es gilt näherungsweise:

$$e^{-at} \approx 1 - at + \frac{a^2 t^2}{2}$$

Also

$$\vec{r} \approx \begin{pmatrix} v_{0x} \cdot t \cdot \left(1 - \frac{at}{2}\right) \\ -\frac{t^2}{2} \cdot (g + a v_{0z}) + v_{0z} t \end{pmatrix}$$

Bei der Aufschlagstelle gilt $z_a = 0$ also

$$t_a = \frac{2 v_{0z}}{(g + a v_{0z})} \ \Rightarrow\ x_a = \frac{2 v_{0x} v_{0z} g}{(g + a v_{0z})^2} \ \leq\ \lim_{a \to 0} x_a = \frac{2 v_{0x} v_{0z}}{g}$$

Aufgrund der Reibungskraft ergibt sich also eine kürzere Flugbahn, der Stein fliegt also nicht so weit als wenn $a = 0$.