Theoretische Mechanik
FSU Jena - SS 2007
Blatt 04 - Lösungen

Stilianos Louca

22. Mai 2007

Thema: Bilanzgleichungen und Erhaltungssätze

Aufgabe 1

a)
- $$\vec{\nabla} \times \vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0 \ \Rightarrow \ Keine\ Potentialkraft\ \forall\ a, b, c$$
- $$\vec{\nabla} \times \vec{F}_2 = \frac{3}{r^5} \cdot \begin{pmatrix} yz(b-c) \\ zx(c-a) \\ xy(a-b) \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ Potentialkraft\ f\ddot{u}r\ a = b = c$$

b) Für die zweite Kraft $\vec{F}_2,\ a = b = c$, ist ein Potentialfeld gegeben durch

$$U_2 = \int_x^{x_0} F_x(\xi, y_0, z_0) d\xi + \int_y^{y_0} F_y(x, \xi, z_0) d\xi + \int_z^{z_0} F_z(x, y, \xi) d\xi$$

$$= \left[\frac{-a}{(\xi^2 + y_0^2 + z_0^2)^{1/2}}\right]_x^{x_0} + \left[\frac{-a}{(x^2 + \xi^2 + z_0^2)^{1/2}}\right]_y^{y_0} + \left[\frac{-a}{(x^2 + y^2 + \xi^2)^{1/2}}\right]_z^{z_0} = \frac{a}{r} - \frac{a}{r_0}$$

$$F\ddot{u}r\ r_0 = \infty \ \rightarrow \ U(x, y, z) = \frac{a}{r}$$

c) In Kugelkoordinaten gilt

$$\vec{g}_\varphi = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \rho \cdot \begin{pmatrix} -\sin\theta \sin\varphi \\ \sin\theta \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \ d\vec{r} = \vec{g}_\varphi \cdot d\varphi \quad (f\ddot{u}r\ \theta, \rho : const)$$

- Erste Kraft:

$$\int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} = \int_0^\pi \vec{F}_1 \cdot \vec{g}_\varphi \cdot d\varphi = \rho_0^2 \sin^2\theta_0 \cdot \int_0^\pi \left[(b-a) \cdot \sin\varphi \cos\varphi - \sin^2\varphi\right] \cdot d\varphi$$

$$= \frac{\rho_0^2 \sin^2\theta_0}{2} \cdot \left[\frac{(a-b)\cos 2\varphi}{2} - \varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_0^\pi = -\frac{\pi \rho_0^2 \sin^2\theta_0}{2}$$

$$\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} = \frac{\rho_0^2 \sin^2\theta_0}{2} \cdot \left[\frac{(a-b)\cos 2\varphi}{2} - \varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_0^{2\pi} = -\pi \rho_0^2 \sin^2\theta_0$$

- Zweite Kraft analog:

$$\int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} = \int_0^{\pi} \vec{F}_2 \cdot \vec{g}_\varphi \cdot d\varphi = \frac{(b-a)\sin^2\theta_0}{\rho_0} \cdot \int_0^{\pi} \cos\varphi \sin\varphi \cdot d\varphi = \frac{(b-a)\sin^2\theta_0}{\rho_0} \cdot \left[\frac{-\cos 2\varphi}{4}\right]_0^{\pi} = 0$$

$$\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} = \frac{(b-a)\sin^2\theta_0}{\rho_0} \cdot \left[\frac{-\cos 2\varphi}{4}\right]_0^{2\pi} = 0$$

Diese Ergebnisse gelten $\forall\ a, b, c$.

Aufgabe 2

a) Die Kraft $\vec{F}_g = \frac{-\alpha\vec{r}}{r^3}$ ist offensichtlich Konservativ. Das entsprechende Potentialfeld ist gegeben durch $U_G(r) = \frac{-\alpha}{r}$, und für die Energie E des Objekts gilt

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d(T+U_G)}{dt} = P_d = \vec{F}_d \cdot \dot{\vec{r}} = -\beta \left|\dot{\vec{r}}\right|^2$$

wobei $T = \frac{1}{2}m\left|\dot{\vec{r}}\right|^2$ die kinetische Energie und $\vec{F}_d = -\beta \cdot \dot{\vec{r}}$ die dissipativen Kräfte sind. Für den Drehimpuls $\vec{L} = m \cdot \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ gilt

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = -\frac{\alpha}{r^3} \cdot \vec{r} \times \vec{r} - \beta \cdot \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = -\beta \cdot \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = -\frac{\beta}{m} \cdot \vec{L}$$

Ist (L_1, L_2, L_3) der Koordinatenvektor von $\vec{L}$ (bzgl. der drei Hauptachsen), so gilt

$$\frac{dL_i}{dt} = -\frac{\beta}{m} L_i \;\Rightarrow\; L_i(t) = L_{i_0} \cdot e^{-\frac{\beta}{m}t} \;\Rightarrow\; \vec{L} = \vec{L}_0 \cdot e^{-\frac{\beta}{m}t} \tag{1}$$

wobei L_{i_0} der Anfangswert der i-ten Komponente ist. Demzufolge gilt

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} \vec{L} = \vec{0}}$$

b) Im mitrotierenden System S_r gilt allgemein

$$m\ddot{\vec{r}}_r = \vec{F}_r = \vec{F} - m \cdot \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_r) + 2m \cdot \dot{\vec{r}}_r \times \vec{\omega}$$

wobei $\vec{F}_r$ und $\vec{F} = \frac{-\alpha\vec{r}}{r^3}$ jeweils die Kraft im rotierenden und Inertialsystem seien. Im folgenden beziehen sich alle Vektoren auf das rotierende Bezugssystem (Zylinderkoordinaten).

Energiebilanz

$$\frac{dT}{dt} = \vec{F}_r \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{-\alpha}{r^3} \cdot \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} - m\omega_0^2 \cdot \dot{\vec{r}} \cdot (\vec{e}_z \times (\vec{e}_z \times \vec{r})) + 2m\omega_0(\dot{\vec{r}} \times \vec{e}_z) \cdot \dot{\vec{r}}$$

$$= \frac{-\alpha}{r^3} \cdot \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} - m\omega_0^2 \cdot (\vec{e}_z \times \vec{r}) \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{e}_z) = -\frac{dU_G}{dt} - m\omega_0^2 \cdot (z \cdot \vec{e}_z \times \vec{e}_z + r \cdot \vec{e}_z \times \vec{e}_\rho) \cdot (\dot{z} \cdot \vec{e}_z \times \vec{e}_z + \dot{r} \cdot \vec{e}_\rho \times \vec{e}_z + r\dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi \times \vec{e}_z)$$

$$= -\frac{dU_G}{dt} - mr\omega_0^2 \cdot \vec{e}_\varphi \cdot (-\dot{r} \cdot \vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\rho) = -\frac{dU_G}{dt} + mr\dot{r}\omega_0^2 \;\Rightarrow\; \frac{d(T+U_G)}{dt} = mr\omega_0^2 \cdot \dot{r} = m\omega_0^2 \cdot \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}$$

Bemerkung: $\dot{r} = \frac{d|\vec{r}|}{dt}$

Ein Potential U_z der Zentrifugalkraft $\vec{F}_z = m\omega_0^2 \cdot \vec{r}$ ist gegeben durch

$$U_z(r) = -\frac{mr^2\omega_0^2}{2} \quad da \quad -\vec{\nabla} \cdot U_z = \vec{F}_z$$

Die Zentrifugalkraft ist also auch konservativ und die allgemeine Energiebilanz ist gegeben durch:

$$\frac{d(T+U_G+U_z)}{dt} = \frac{d(T+U_G)}{dt} + \frac{dU_z}{dt} = \frac{d(T+U_G)}{dt} - \vec{F}_z \cdot \dot{\vec{r}} = 0$$

also

$$\boxed{T + U_G + U_z = const}$$

Drehimpulsbilanz

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_r = -\frac{\alpha}{r^3} \cdot \vec{r} \times \vec{r} - m \cdot \vec{r} \times (\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})) + 2m \cdot \vec{r} \times (\dot{\vec{r}} \times \vec{\omega})$$

$$= -m \cdot (\rho \vec{e}_\rho + z\vec{e}_z) \times (\vec{\omega} \cdot (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \vec{r} \cdot (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})) + 2m\omega_0 \cdot (z\vec{e}_z + r\vec{e}_\rho) \times (\dot{z} \cdot \vec{e}_z \times \vec{e}_z + \dot{r} \cdot \vec{e}_\rho \times \vec{e}_z + \dot{\varphi} r \cdot \vec{e}_\varphi \times \vec{e}_z)$$

$$= m\omega_0^2 zr \cdot \vec{e}_\varphi + 2m\omega_0 \cdot (\dot{r}z \cdot \vec{e}_\rho + rz\dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi - r\dot{r} \cdot \vec{e}_z) \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\left(\vec{L} + m\omega_0 r^2 \cdot \vec{e}_z\right) = m\omega_0^2 zr \cdot \vec{e}_\varphi + 2m\omega_0 \cdot (\dot{r}z\vec{e}_\rho + rz\dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi)$$

Die z Komponente bleibt also erhalten.