

Theoretische Mechanik

FSU Jena - SS 2007

Blatt 03 - Lösungen

Stilianos Louca

15. Mai 2007

(4) Karussell

Zylinderkoordinaten

In Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) gilt allgemein:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{g}_\rho = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_\rho, \quad \vec{g}_\varphi = \rho \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \rho \cdot \vec{e}_\varphi, \quad \vec{g}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{e}_z$$

$$\dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\rho, \quad \dot{\vec{e}}_\rho = \dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi, \quad \dot{\vec{e}}_z = 0, \quad \vec{r} = \rho \cdot \vec{e}_\rho + z \cdot \vec{e}_z, \quad \dot{\vec{r}} = \dot{\rho} \cdot \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi + \dot{z} \cdot \vec{e}_z$$

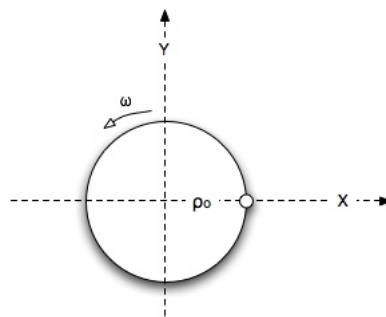
und

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \cdot \vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}) \cdot \vec{e}_\varphi + \ddot{z} \cdot \vec{e}_z \quad (1)$$

Bezeichnen: Alle mit k indizierten Variablen beziehen sich auf das rotierende Karussellsystem während die entsprechenden *nicht-indizierten* sich auf das Inertialsystem der Eltern beziehen. Die zeitlichen Ableitungen von Variablen beziehen sich immer auf das entsprechende Bezugssystem. Außerdem setzen wir alle Koordinatenursprünge (Kartesische und Zylinder) ins Zentrum des Karussells so dass die Anfangsposition des Mädchens durch $(x, y) = (\rho'_{01}, 0)$ bzw. $\rho = \rho'_{01}$, $\varphi = 0$ gegeben ist.

Definieren: $\rho_0 := \rho'_{01}$, $\rho_b := \rho'_{02}$ und $\omega := \omega_0$.

Annahme: $\omega > 0$.



Aufstellen der Bewegungsgleichungen

Karussellsystem

Im allgemeinen gilt für Geschwindigkeit $\vec{v}_k$ und Beschleunigung $\vec{a}_k$ im mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ rotierenden Karussellsystem

$$\dot{\vec{r}}_k = \vec{v}_k = \vec{v} - \vec{\omega} \times \vec{r}_k \quad \wedge \quad \ddot{\vec{r}}_k = \vec{a}_k = \vec{a} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_k) + 2\vec{v}_k \times \vec{\omega}$$

wobei $\vec{v}$ und $\vec{a}$ die jeweilige Geschwindigkeit bzw. Beschleunigung im Inertialsystem sind. $\vec{r}_k$ ist dabei der jeweilige Ortsvektor zum betrachteten Punkt im Karussellsystem. Wir wissen das im Inertialsystem (Eltern) der losgelassene Ball keiner Beschleunigung unterliegt (da *Kräftefrei*), also $\vec{a} = 0$.

Bemerkung: Es gilt $\rho_k = \rho$, $\vec{\omega}_k = \vec{\omega} = \omega \cdot \vec{e}_z$ und $z_k = z$.

Die Bewegungsgleichung des Balles im Karussellsystem ist also gegeben durch

$$\ddot{\vec{r}}_k = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_k) + 2 \cdot \dot{\vec{r}}_k \times \vec{\omega}, \quad \rho_k(0) = \rho_0, \quad \varphi_k(0) = z_k(0) = 0, \quad \dot{\rho}_k(0) = \dot{\varphi}_k(0) = \dot{z}_k(0) = 0$$

also

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}_k &= -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (\rho_k \cdot \vec{e}_\rho + z_k \cdot \vec{e}_z)) + 2 \cdot (\dot{\rho}_k \cdot \vec{e}_\rho + \rho_k \dot{\varphi}_k \cdot \vec{e}_\varphi + \dot{z}_k \cdot \vec{e}_z) \times \vec{\omega} \\ &= -\rho_k \omega^2 \cdot \vec{e}_z \times (\vec{e}_z \times \vec{e}_\rho) + 2\dot{\rho}_k \omega \cdot \vec{e}_\rho \times \vec{e}_z + 2\rho_k \dot{\varphi}_k \omega \cdot \vec{e}_\varphi \times \vec{e}_z \\ &= \rho_k \omega^2 \cdot \vec{e}_\rho - 2\dot{\rho}_k \omega \cdot \vec{e}_\varphi + 2\rho_k \dot{\varphi}_k \omega \cdot \vec{e}_\rho = \rho_k \omega (\omega + 2\dot{\varphi}_k) \cdot \vec{e}_\rho - 2\dot{\rho}_k \omega \cdot \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

Durch Komponenten-Vergleich mit (1) schließt man dass

$$\rho_k \omega (\omega + 2\dot{\varphi}_k) = \ddot{\rho}_k - \rho_k \dot{\varphi}_k^2 \quad \wedge \quad -2\dot{\rho}_k \omega = 2\dot{\rho}_k \dot{\varphi}_k + \rho_k \ddot{\varphi}_k \quad \wedge \quad \ddot{z}_k = 0$$

also

$$\ddot{\rho}_k = \rho_k (\omega^2 + 2\omega \dot{\varphi}_k + \dot{\varphi}_k^2) \quad \wedge \quad \ddot{\varphi}_k = \frac{-2\dot{\rho}_k (\omega + \dot{\varphi}_k)}{\rho_k}$$

Inertialsystem (Eltern)

Im Inertialsystem gilt offensichtlich $\ddot{\vec{r}} = 0$ bzw. $\dot{\vec{r}} = \text{const.}$ Außerdem ist klar dass $z(t) = z_k(t) = 0 \quad \forall t$. Demzufolge gilt

$$\forall t : \dot{\vec{r}} = \dot{\rho} \cdot \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi = \dot{\vec{r}}(0) = \rho_0 \omega \cdot \vec{e}_\varphi(0) = \omega \rho_0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Durch Komponentenvergleich ergibt sich

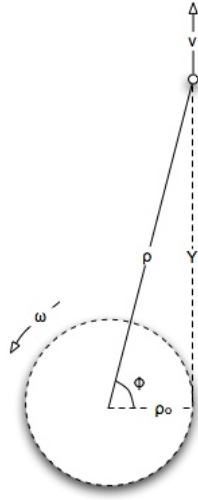
$$\dot{\rho} = \omega \rho_0 \sin \varphi \quad \wedge \quad \dot{\varphi} = \frac{\omega \rho_0 \cos \varphi}{\rho}, \quad \rho(0) = \rho_0, \quad \varphi(0) = 0$$

Lösen der Bewegungsgleichungen - Bahngleichungen

Inertialsystem

Methode A

Aus folgender Zeichnung können wir sofort die Lösung der Bewegungsgleichung bzw. die Bahngleichung für das Inertialsystem ablesen



Sei $v = \omega \cdot \rho_0$ die (konstante) Geschwindigkeit des Balls, der nach einer Zeit t den (geraden) Abstand $Y = vt$ zurückgelegt hat. Demnach gilt:

$$Y = \omega \rho_0 t = \tan \varphi \cdot \rho_0 \Rightarrow \varphi(t) = \arctan(\omega \cdot t)$$

und

$$\rho = \frac{\rho_0}{\cos \varphi} = \frac{\rho_0}{\cos(\arctan(\omega t))} = \rho_0 \sqrt{1 + \omega^2 t^2}$$

Methode B

Aus den DGL folgt

$$\frac{d\varphi}{\cos \varphi} = dt \cdot \frac{\omega \rho_0}{\rho} = \frac{d\rho}{\omega \rho_0 \sin \varphi} \cdot \frac{\omega \rho_0}{\rho} \Rightarrow \ln \left| \frac{1}{\cos \varphi} \right| = \int_0^\varphi \tan u \cdot du = \int_{\rho_0}^\rho \frac{du}{u} = \ln \left| \frac{\rho}{\rho_0} \right| \Rightarrow \rho = \frac{\rho_0}{\cos \varphi}$$

und entsprechend

$$\dot{\varphi} = \frac{\omega \rho_0 \cos \varphi}{\rho} = \omega \cos^2 \varphi \Rightarrow \tan \varphi = \int_0^\varphi \frac{du}{\cos^2 u} = \int_0^t \omega du = \omega t \Rightarrow \varphi(t) = \arctan(\omega t)$$

Demzufolge

$$\rho = \frac{\rho_0}{\cos(\arctan(\omega t))} = \rho_0 \sqrt{1 + \omega^2 t^2} \quad \square$$

Karussellsystem

Methode A

Aus der Tatsache dass $\rho_k(t) = \rho(t)$ ist offensichtlich dass

$$\rho_k(t) = \rho_0 \sqrt{1 + \omega^2 t^2}$$

Außerdem, kann man durch einfache geometrische Überlegungen schließen dass $\varphi_k(t) = \varphi(t) - \omega t$ also

$$\varphi_k(t) = \arctan(\omega t) - \omega t$$

Durch Verknüpfung der beiden Gleichungen kommt man auf

$$\varphi_k(\rho_k) = \arctan \left(\frac{\sqrt{\rho_k^2 - \rho_0^2}}{\rho_0} \right) - \frac{\sqrt{\rho_k^2 - \rho_0^2}}{\rho_0}$$

Eine einfache Probe zeigt dass die oberen Gleichungen die aufgestellten Bewegungsgleichungen (mit deren Lösen wir uns am Ende gar nicht beschäftigt haben) sowie auch die geforderten Anfangsbedingungen erfüllen.

Methode B

Durch die DGL folgt

$$\ln |\omega + \dot{\varphi}_k| = \int \frac{d\dot{\varphi}_k}{\omega + \dot{\varphi}_k} = -2 \int \frac{d\rho_k}{\rho_k} = \ln \left| \frac{A}{\rho_k^2} \right|, \quad A \in \mathbb{R}^+$$

$$\text{Fordern: } \dot{\varphi}_k(\rho_k = \rho_0) = 0 \Rightarrow A = \omega \rho_0^2 \Rightarrow \dot{\varphi}_k = \frac{\omega \rho_0^2}{\rho_k^2} - \omega$$

$$\Rightarrow \ddot{\rho}_k = \rho_k \cdot \left(\omega^2 + 2\omega \left(\frac{\omega \rho_0^2}{\rho_k^2} - \omega \right) + \left(\frac{\omega \rho_0^2}{\rho_k^2} - \omega \right)^2 \right) = \frac{\omega^2 \rho_0^4}{\rho_k^3}$$

$$\text{Sub: } p(\rho_k) := \dot{\rho}_k \Rightarrow \ddot{\rho}_k = \frac{dp}{d\rho_k} \cdot p \Rightarrow \frac{p^2}{2} = \int p \cdot d\rho_k = \omega^2 \rho_0^2 \int \frac{d\rho_k}{\rho_k^3} = \frac{\omega^2 \rho_0^2}{-2\rho_k^2} + \frac{C}{2}, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\text{Fordern: } \dot{\rho}_k(\rho_k = \rho_0) = 0 \Rightarrow C = \omega^2 \rho_0^2 \Rightarrow \dot{\rho}_k = \frac{\omega \rho_0}{\rho_k} \sqrt{\rho_k^2 - \rho_0^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\rho_k^2 - \rho_0^2} = \int \frac{\rho_k d\rho_k}{\sqrt{\rho_k^2 - \rho_0^2}} = \int \omega \rho_0 dt = \omega \rho_0 t + G, \quad G \in \mathbb{R}$$

$$\text{Fordern: } \rho_k(t=0) = \rho_0 \Rightarrow G = 0 \Rightarrow \rho_k = \rho_0 \sqrt{\omega^2 t^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \dot{\varphi}_k = \frac{\omega}{(\omega^2 t^2 + 1)} - \omega \Rightarrow \varphi_k = \int_0^t \frac{\omega du}{(\omega^2 u^2 + 1)} - \int_0^t \omega du = \arctan(\omega t) - \omega t \quad \square$$

Des Bruders Ball

Sei in beiden Fällen $\vec{v}_k = v_\rho \cdot \vec{e}_{\rho_0} + \rho_b v_\varphi \cdot \vec{e}_{\varphi_0}$ die (gesuchte) Geschwindigkeit des Balles im Karussellsystem, wobei $\vec{e}_{\rho_0}$, $\vec{e}_{\varphi_0}$ und $\vec{e}_{z_0}$ die kovarianten Einheitsvektoren (am Bruder) am Zeitpunkt $t = 0$ seien.

Im Inertialsystem ist demzufolge die Geschwindigkeit $\vec{v}$ des Balles gegeben durch

$$\vec{v} = \vec{v}_k + \vec{\omega} \times \vec{r}_k = (v_\rho \cdot \vec{e}_{\rho_0} + \rho_b v_\varphi \cdot \vec{e}_{\varphi_0}) + \omega \cdot \vec{e}_{z_0} \times (\rho_b \vec{e}_{\rho_0} + z \cdot \vec{e}_{z_0}) = v_\rho \cdot \vec{e}_{\rho_0} + \rho_b (v_\varphi + \omega) \cdot \vec{e}_{\varphi_0} = \begin{bmatrix} v_\rho \\ \rho_b (v_\varphi + \omega) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aus der Tatsache dass der Ball sich ursprünglich an der Position $(\rho_b, 0)$ befindet ist ersichtlich dass an einem gegebenen Zeitpunkt t die Position $\vec{r}_b$ des Balles (bzgl. Inertialsystem) gegeben ist durch

$$\vec{r}_b = \begin{bmatrix} \rho_b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_\rho \cdot t \\ \rho_b (v_\varphi + \omega) \cdot t \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

und in Zylinderkoordinaten

$$\rho = \sqrt{(\rho_b + v_\rho t)^2 + \rho_b^2 (v_\varphi + \omega)^2 t^2} \quad \wedge \quad \tan \varphi = \frac{\rho_b (v_\varphi + \omega) t}{\rho_b + v_\rho t}$$

Ziel: Die Schwester

Im Inertialsystem ist die Bahnkurve der Schwester beschrieben durch

$$\rho_s(t) = \rho_0 : \text{const} \quad \wedge \quad \varphi_s(t) = \omega t$$

und im Karussellsystem

$$\rho_{sk}(t) \equiv \rho_0, \wedge \varphi_{sk}(t) \equiv 0$$

Gesucht sind $v_\rho < 0$ und v_φ so dass der Punkt $(\rho_k, \varphi_k) = (\rho_0, 0)$ in der Bahnkurve bzgl. Karussellsystem bzw. $(\rho, \varphi) = (\rho_0, \omega t)$ in der Bahnkurve bzgl. Inertialsystem des Balles enthalten ist. Letztere ist eine gerade Kurve weshalb diese einfacher zu behandeln ist. Lösen des Systems für $(\rho, \varphi) = (\rho_0, \omega t)$ würde unendlich viele Lösungen geben, also können wir hier etwas wählerisch sein. Wir setzen v_φ so dass $\rho_b(v_\varphi + \omega) = 0$, der Ball also durch den Punkt $\vec{r} = -\rho_0 \cdot \vec{e}_x$ bzw. $\varphi = \pi, \rho = \rho_0$ saust. Die dazu benötigte Zeit währe dann einfach $T = -(\rho_b + \rho_0)/v_\rho$. Jetzt setzen wir einfach v_ρ so dass das Mädchen an dem Zeitpunkt sich an der gleichen Stelle befindet, d.h. $\omega T = \pi$ also

$$v_\rho = -\frac{\omega(\rho_b + \rho_0)}{\pi} \wedge v_\varphi = -\omega$$

Zusammengefasst kann der Bruder folgende Geschwindigkeit wählen:

$$\vec{v}_k = -\frac{\omega(\rho_b + \rho_0)}{\pi} \cdot \vec{e}_\rho - \rho_b \omega \cdot \vec{e}_\varphi$$

Bemerkung: Im allgemeinen muss die Geschwindigkeit so gesetzt sein dass der Ball *nach Innen* und für kleine $|v_\rho|$ bzgl. des Karussellsystems sogar nach *links* fliegt, d.h. $v_\rho, v_\varphi < 0$ da er aufgrund der Coriolis-Kraft immer eine Rechtsabweichung erfahren wird!

Ziel: Die Eltern

Analog zu vorhin setzten wir wieder $v_\varphi = -\omega$ so dass der Ball geradeaus auf die Eltern saust (diese Wahl ist in diesem Fall zwingend). Egal was für einen (positiven) Wert wir jetzt für $v_\rho > 0$ wählen, der Ball landet immer bei den Eltern (so lange keine äußeren Kräfte wie z.b die Gravitation die Bahn des Balles beeinflussen). Allgemein also

$$\vec{v}_k = v_\rho \cdot \vec{e}_\rho - \rho_b \omega \cdot \vec{e}_\varphi, \quad v_\rho > 0 \text{ beliebig}$$