Übungen zur Theoretischen Mechanik
FSU Jena - SS 2007
Blatt 01 - Lösungen

Stilianos Louca

25. April 2007

Rotationsparaboloid

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} uv\cos\phi \\ uv\sin\phi \\ \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \end{bmatrix}$$

$$\vec{g}_1 := \vec{g}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \begin{bmatrix} v\cos\phi \\ v\sin\phi \\ u \end{bmatrix},\ \vec{g}_2 := \vec{g}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{bmatrix} u\cos\phi \\ u\sin\phi \\ -v \end{bmatrix},\ \vec{g}_3 := \vec{g}_\phi = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = \begin{bmatrix} -uv\sin\phi \\ uv\cos\phi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 := \lambda_u := |\vec{g}_u| = \sqrt{u^2+v^2},\ \lambda_2 := \lambda_v := |\vec{g}_v| = \sqrt{u^2+v^2},\ \lambda_3 := \lambda_\phi := |\vec{g}_\phi| = uv$$

$$Kovarianten\ Einheitsvektoren:\ \vec{e}_1 := \vec{e}_u := \frac{\vec{g}_u}{\lambda_u},\ \vec{e}_2 := \vec{e}_v := \frac{\vec{g}_v}{\lambda_v},\ \vec{e}_3 := \vec{e}_\phi := \frac{\vec{g}_\phi}{\lambda_\phi}$$

- Der metrische Fundamentaltensor g ist definier als $g_{ik} := \vec{g}_i \cdot \vec{g}_k$ also

$$g = \begin{bmatrix} \vec{g}_1\cdot\vec{g}_1 & \vec{g}_1\cdot\vec{g}_2 & \vec{g}_1\cdot\vec{g}_3 \\ \vec{g}_2\cdot\vec{g}_1 & \vec{g}_2\cdot\vec{g}_2 & \vec{g}_2\cdot\vec{g}_3 \\ \vec{g}_1\cdot\vec{g}_3 & \vec{g}_3\cdot\vec{g}_2 & \vec{g}_3\cdot\vec{g}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^2+v^2 & 0 & 0 \\ 0 & u^2+v^2 & 0 \\ 0 & 0 & u^2v^2 \end{bmatrix}$$

  Das Volumenelement dV ist gegeben durch

$$dV = \sqrt{\det(g)} \cdot du \cdot dv \cdot d\phi = (u^2+v^2)\cdot vu \cdot du \cdot dv \cdot d\phi$$

- Die Koordinaten sind offensichtlich orthogonal da

$$\vec{g}_i \cdot \vec{g}_k = g_{ik} = 0 \ \Rightarrow\ \vec{g}_i \perp \vec{g}_k \quad \forall\ i \neq k \quad \square$$

- Geschwindigkeit:

$$\dot{\vec{r}} = \lambda_i \vec{e}_i \cdot \dot{x}^i = \lambda_u \vec{e}_u \cdot \dot{u} + \lambda_v \vec{e}_v \cdot \dot{v} + \lambda_\phi \vec{e}_\phi \cdot \dot{\phi} = \sqrt{v^2+u^2}\cdot \vec{e}_u \cdot \dot{u} + \sqrt{v^2+u^2}\cdot\vec{e}_v\cdot\dot{v} + uv\cdot\vec{e}_\phi\cdot\dot{\phi}$$

Beschleunigung:

$$\dot{\vec{e}}_u = \frac{(\dot{v}u - \dot{u}v)}{v^2 + u^2} \cdot \vec{e}_v + \frac{\dot{\phi}v}{\sqrt{v^2 + u^2}} \cdot \vec{e}_\phi$$

$$\dot{\vec{e}}_v = \frac{(v\dot{u} - u\dot{v})}{v^2 + u^2} \cdot \vec{e}_u + \frac{\dot{\phi}u}{\sqrt{v^2 + u^2}} \cdot \vec{e}_\phi$$

$$\dot{\vec{e}}_\phi = \frac{-\dot{\phi}}{\sqrt{v^2 + u^2}}(v\vec{e}_u + u\vec{e}_v)$$

$$\Rightarrow \ \ddot{\vec{r}} = \frac{\partial\left(\lambda_i \vec{e}_i \dot{x}^i\right)}{\partial t} = \dot{\lambda}_i \vec{e}_i \dot{x}^i + \lambda_i \dot{\vec{e}}_i \dot{x}^i + \lambda_i \vec{e}_i \ddot{x}^i$$

$$= \left(\frac{(\dot{v}v + \dot{u}u)}{\sqrt{u^2 + v^2}} (\vec{e}_u \dot{u} + \vec{e}_v \dot{v}) + (\dot{u}v + \dot{v}u)\vec{e}_\phi \dot{\phi}\right)$$

$$+ \left(\left(\frac{(\dot{v}u - \dot{u}v)}{\sqrt{v^2 + u^2}} \cdot \vec{e}_v + \dot{\phi}v \cdot \vec{e}_\phi\right) \cdot \dot{u} + \left(\frac{(v\dot{u} - u\dot{v})}{\sqrt{v^2 + u^2}} \cdot \vec{e}_u + \dot{\phi}u \cdot \vec{e}_\phi\right) \cdot \dot{v} + \frac{-uv\dot{\phi}}{\sqrt{v^2 + u^2}}(v\vec{e}_u + u\vec{e}_v) \cdot \dot{\phi}\right)$$

$$+ \left(\sqrt{v^2 + u^2} \cdot (\vec{e}_u \cdot \ddot{u} + \vec{e}_v \cdot \ddot{v}) + uv\vec{e}_\phi \cdot \ddot{\phi}\right)$$

$$= \frac{\left(u(\dot{u}^2 - \dot{v}^2) + 2\dot{u}\dot{v}v - \dot{\phi}^2 uv^2 + \ddot{u}(u^2 + v^2)\right)}{\sqrt{v^2 + u^2}} \cdot \vec{e}_u$$

$$+ \frac{\left(v(\dot{v}^2 - \dot{u}^2) + 2\dot{u}\dot{v}u - \dot{\phi}^2 vu^2 + \ddot{v}(u^2 + v^2)\right)}{\sqrt{v^2 + u^2}} \cdot \vec{e}_v$$

$$+ \left(2\dot{\phi}\dot{u}v + 2\dot{\phi}\dot{v}u + uv\ddot{\phi}\right) \cdot \vec{e}_\phi$$